Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

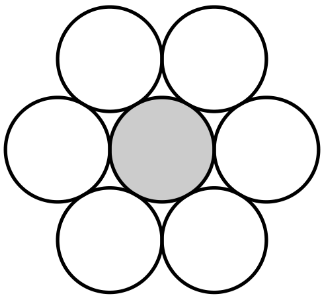
Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

10. Übungsblatt Geometrie

Abgabe bis spätestens ***Montag, den 01.7.2013,*** *vor der Vorlesung. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Sphärische Inversionen* (6 Punkte)

Beschreibe das Bild der folgenden Konfiguration



nach einer sphärischen Inversion

(a) in einem der abgebildeten Kreise,

(b) in einem Kreis, dessen Mittelpunkt einer der Berührpunkte ist.

Aufgabe 2: *Möbiustransformationen bestimmen* (4 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gelernt, dass für $n > 1$ bijektive Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\},$$

die Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbilden, genau die Möbiustransformationen $\text{Möb}(n)$ sind (Proposition 8.7 des Skripts). Möbiustransformationen waren als endliche Hintereinanderausführung von Spiegelungen an Hyperebenen und/oder Sphären definiert.

(a) Zeige, dass diese Aussage für $n = 1$ falsch ist.

(b) Gegeben seien zwei Möbiustransformationen, die

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & ((0,0),(1,0),(0,1)) & \to & ((0,0),(1,0),(2,0)), \\ \text{(ii)} & ((0,0),(1,0),(0,1)) & \to & ((0,0),(1,0),(-1,0)) \end{array}$$

abbilden. Gib sie jeweils als Abbildung an. *Tipp:* Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ bzw $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (der Riemann-Sphäre).

Aufgabe 3: *Möbiustransformationen der Einheitssphäre* (4 + 4 Punkte)

(a) Zeige, dass ein Punkt $c \in \mathbb{R}^2$ genau dann der Mittelpunkt eines Kreises S ist, wenn es keinen Kreis gibt, der durch c geht und S senkrecht schneidet.

Der Schnittwinkel bestimmt sich als Winkel zwischen den Tangenten in den Schnittpunkten oder allgemeiner, als Winkel zwischen den Tangentialvektoren im Schnittpunkt zweier Kurven, die auf den Kreisen verlaufen. Ebenso ist der Winkel zwischen einem Kreis und einer ihn schneidenen Gerade definiert.

(b) Es sei $n > 1$. Zeige, dass eine Möbiustransformation aus $\text{Möb}(n)$, die die Einheitssphäre auf sich selbst abbildet, genau dann eine Affinität (Ähnlichkeitsabbildung) ist, wenn sie 0 auf 0 abbildet.

Aufgabe 4: *Lorentz-Geometrie* (2 + (2) Punkte)

Der Vektor $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^{2,1}$ ist offenbar normiert.

(a) Vervollständige v zu einer Orthonormalbasis bezüglich des Lorentz-Skalarprodukts.

(b) *Bonus:* Zeichne die drei Vektoren im Lorentz-Geometrie-Modell ein, zusammen mit den Hyperboloiden.