Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Geometrie
SoSe 2013

Lösungsvorschlag Aufgabe 2 Übungsblatt 1

Aufgabe 2: *Transformationen* (2 + 2 + 2 Punkte)

a) Gegeben sei eine euklidische Bewegung (Isometrie) im $\mathbb{R}^n$ der Form $Ax+b$. Berechne ihre Inverse.

b) Betrachten wir den n–dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Gib zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ eine orthogonale Abbildung (als Matrix) an, die die Ecke $(1,\dots,1)$ auf $(0,\sqrt{2})$ bzw. $(0,0,\sqrt{3})$ abbildet.

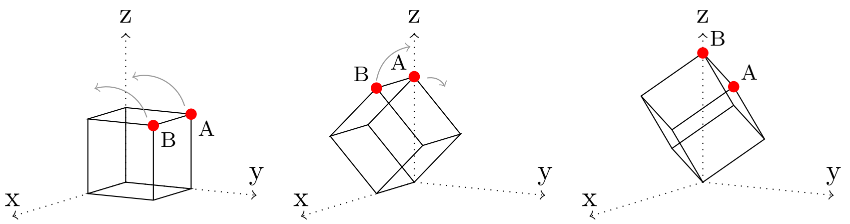
c) Verallgemeinere b) auf den Fall $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Lösungsvorschlag

a) Sei $Ux = Ax + b$ eine euklidische Bewegung (eukl. Transformation, Isometrie). Dann lautet $U^{-1}x = A^{-1}x - A^{-1}b = A^t x - A^t b$.

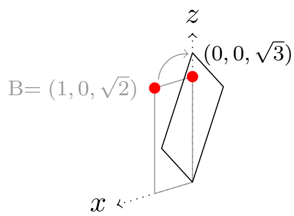
b)
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
sind die beiden einzigen Lösungen für den Fall $n = 2$. Dies ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt, die beiden Basisvektoren auf die Vektoren $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\}$ abzubilden. Man kann nachrechnen, dass beide Matrizen orthogonal sind und $(1,1)$ auf $(0,\sqrt{2})$ abbilden.
Für $n = 3$ ist eine orthogonale Matrix, die die gewünschten Eigenschaften hat, durch
$$D := \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}}_{:=D_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{:=D_2}$$
gegeben, wobei $\alpha := \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0.6155$. Hier stellt D_1 eine Drehung in der yz–Ebene um $\frac{\pi}{4}$ dar $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Die Matrix D_2 'ist' eine Drehung um α in der xz-Ebene. D ist als Komposition orthogonaler Abbildungen selbst orthogonal.

Berechnung von α. Siehe dazu folgende Skizze:



Nachdem wir den Würfel durch D_1 in der yz–Ebene gedreht haben, liegen die Ecken A und B, die zuvor die Koordinaten $(0, 1, 1)$ respektive $(1, 1, 1)$ hatten, nun in der xz–Ebene. Ihre neuen Koordinaten lauten $(0, 0, \sqrt{2})$ bzw. $(1, 0, \sqrt{2})$. Sie formen die oberen beiden Ecken eines Rechtecks in der xz-Ebene. Die unteren beiden Ecken sind durch $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ gegeben. Sie blieben bei der Drehung D_1 unverändert.

Die Ecke B soll im nächsten Schritt mittels der Drehung D_2 auf $(0, 0, \sqrt{3})$ abgebildet werden.

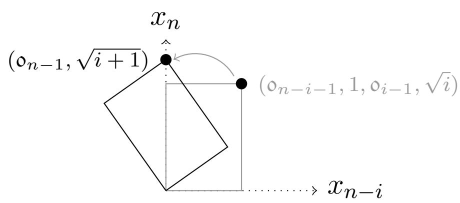


Mithilfe des Skalarprodukts errechnen wir den Winkel:

$$\alpha = \arccos \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Wir könnten den Würfel jetzt noch beliebig in der xy–Ebene, z.B. mittels einer orthogonalen Matrix D_3, drehen. Das Resultat, also $D_3 \cdot D_2 \cdot D_1$, wäre immer noch eine orthogonale Matrix, die den Punkt $(1, 1, 1)$ auf $(0, 0, \sqrt{3})$ abbildet.

c) Unsere Ergebnisse aus (b) lassen sich nun für beliebige $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern: Unsere gesuchte orthogonale Matrix lässt sich als Hintereinanderausführung von Drehungen um die $x_{n-i}x_n$-Ebene darstellen, die das jeweilige Rechteck in der $x_{n-i}x_n$-Ebene mit Seitenlängen 1 und $\sqrt{i}$ um einen entsprechenden Winkel α_i dreht. Genauer gesagt: Bezeichne $\mathfrak{o}_i$ den Nullvektor im $\mathbb{R}^i$. Dann wollen wir den Vektor $(\mathfrak{o}_{n-i-1}, 1, \mathfrak{o}_{i-1}, \sqrt{i})$ mit Drehung D_i auf $(\mathfrak{o}_{n-1}, \sqrt{i+1})$ abbilden.



Der Drehwinkel berechnet sich analog über das Skalarprodukt:

$$\alpha_i = \arccos \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{n-i-1} \\ 1 \\ \mathfrak{o}_{i-1} \\ \sqrt{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{n-1} \\ \sqrt{i+1} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{i-1} \\ 1 \\ \mathfrak{o}_{i-1} \\ \sqrt{i} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{n-1} \\ \sqrt{i+1} \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{\sqrt{i}\sqrt{i+1}}{i+1} = \arccos \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}}.$$

Es gilt $\cos(\alpha_i) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}}$ und $\sin(\alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{i+1}}$ (nach dem trigonometrischen Pythagoras). Man erhält also die Drehmatrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & n-i & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ n-i \\ \\ \\ \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{i+1}} \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{i+1}} & & & & \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Mit Induktion lässt sich nun leicht zeigen, dass das Produkt dieser Matrizen, also $D := D_{n-1} \cdots D_1$ den Punkt $(1, \ldots, 1)$ aus $(0, \ldots, 0, \sqrt{n})$ abbildet. Und als Produkt orthogonaler Matrizen ist D natürlich auch orthogonal.