Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

Nachklausur

31. März 2016

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: ______

Ergebnis auf Website (ja/nein): ______

- Tragen Sie bitte auf jeder Seite **Ihren Namen** und **Ihre Matrikelnummer** ein.
- Diese Nachklausur besteht aus **sechs Aufgaben** zu je 20 Punkten.
- Aufgabe 1 ist eine **Ankreuz-Aufgabe**, Begründungen sind nicht erforderlich.
  - Eine **richtige Antwort** gibt 2 Punkte,
  - eine **nicht gegebene Antwort** gibt 1 Punkt, und
  - eine **falsche Antwort** gibt 0 Punkte.
- Denken Sie in den Aufgaben 2–6 daran, jeden Schritt gut zu begründen.
- Schreiben Sie in den Aufgaben 2–6 auch Ansätze und Ideen auf, selbst wenn Sie nicht sehen, ob oder wie diese zur Lösung führen werden.
- Benutzen Sie zum Nachdenken und für Proberechnungen bitte **Schmierpapier**.
- **Einziges erlaubtes Hilfsmittel** ist ein eigenständig beschriebener DIN A4 Zettel.
- Die Bearbeitungsdauer der Nachklausur beträgt **90 Minuten**.
- Klausureinsicht ist am 1. April 2016, weitere Details auf der Webseite der VL.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte								

Name: Musterlösung　　　　Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 1: 　　　　20 Punkte

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen **W**ahr oder **F**alsch sind:

W	F	
☒	☐	Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert eine F-invariante Fahne.
☒	☐	Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g : V \to V$ Affinitäten. Dann ist die Komposition $g \circ f$ ebenfalls eine Affinität.
☐	☒	Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Dann hat V eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von F.
☐	☒	Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthogonalbasis von V. Dann ist $\{b_1 + b_2, b_2, b_3\}$ ebenfalls Orthogonalbasis.
☐	☒	Für alle $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und jeden Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ von F zu einem Eigenwert λ von F gilt: $-v$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.
☒	☐	Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ und $P_A(X)$ das charakteristische Polynom. Dann gilt $$P_A(0) = \det A.$$
☒	☐	Jede Komposition von Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$ ist eine orthogonale Abbildung.
☒	☐	Sei V ein 7-dimensionaler reeller Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann hat F einen Eigenvektor.
☒	☐	Jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum hat eine Orthogonalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $\|\|b_i\|\| = 2$ für alle i.
☐	☒	Sei K ein Körper. Für jede symmetrische Bilinearform $s\colon K^n \times K^n \to K$ und jedes $v \in K^n$ gilt $s(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2: 20 Punkte

Seien $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 4 & -15 & 6 \\ 12 & -41 & 15 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) **Beweisen Sie**: v ist ein Eigenvektor von A und bestimmen Sie den zu v gehörigen Eigenwert.

(b) **Beweisen Sie**: $-x^3 - 3x^2 - x - 3$ ist das charakteristische Polynom P_A von A und -3 ist die einzige reelle Nullstelle von P_A.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A trigonalisierbar ist.

(d) Bestimmen Sie alle Eigenräume und Haupträume von A durch Angabe von Basen.

(a) $Av = \begin{pmatrix} (-3)\cdot 3 \\ 4\cdot 3 + 6\cdot(-2) \\ 12\cdot 3 + 15\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -3v \Rightarrow -3$ EW zum EV v.

(b) $P_A(x) = \begin{vmatrix} -3-x & 5 & 0 \\ 4 & -15-x & 6 \\ 12 & -41 & 15-x \end{vmatrix} = (-3-x)\begin{vmatrix} -15-x & 6 \\ -41 & 15-x \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 15-x \end{vmatrix}$

$= (-3-x)(-225+x^2+246) + 5(4x+12)$

$= -x^3 - 3x^2 - 21x - 63 + 20x + 60 = -x^3 - 3x^2 - x - 3$

$(-x^3 - 3x^2 - x - 3) : (x+3) = -x^2 - 1$

$\underline{-(-x^3 - 3x^2)}$

$0 - x - 3$

$\underline{-(-x-3)}$

0

$\Rightarrow P_A(x) = -(x+3)(x^2+1)$

x^2+1 hat keine reelle NST.

(c) $P_A(x)$ zerfällt nicht in Linearfaktoren

$\Rightarrow A$ ist nicht trigonalisierbar

(d) -3 einziger EW $\underset{\text{alg. Vielf} = 1}{\overset{(a)}{\Rightarrow}}$ $\mathrm{Hau}(A; -3) = \mathrm{Eig}(A; -3) = \mathbb{R}v$.

Name: Musterlösung Matrikelnummer: __________

Aufgabe 3: 20 Punkte

Sei die Bilinearform s auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x,y) = x^T Ay$ für

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

Seien die Vektoren $b_1, b_2, b_3, v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **Beweisen Sie**: s ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(b) **Beweisen Sie**: $\{b_1, b_2, b_3\}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich s, aber keine Orthonormalbasis.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $w \in \mathrm{span}\{v\}$, der bezüglich des Skalarproduktes s die Länge 1 hat.

(a) z: A sym & positiv definit.

A sym ✓

$A_1 = (10) \Rightarrow \det A_1 = 10 > 0$

$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 20 - 9 = 11 > 0$

$A_3 = A \Rightarrow \det A_3 = \det A_2 - \det\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 11 - 10 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ A pos def $\Rightarrow$ s Skalarprodukt.

(b) $Ab_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, Ab_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Ab_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$s(b_1, b_2) = \langle b_1, Ab_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$s(b_1, b_3) = \langle b_1, Ab_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$s(b_2, b_3) = \langle b_2, Ab_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ Orth. basis

$s(b_1, b_1) = \langle b_1, Ab_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 10 \neq 1$

$\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ keine ONB.

(c) $\|v\| = \sqrt{s(v,v)} = \sqrt{\langle v, Av \rangle} = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}$

$= \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} v = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ hat Länge 1.

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 4: 20 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Sei $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform mit $s(v,v) = 0$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$.

Beweisen Sie: Es existieren $x, y \in V$ mit $s(x,x) < 0 < s(y,y)$.

Hinweis: Untersuchen Sie eine möglichst einfache darstellende Matrix von s.

$s(v,v) = 0$ für $v \neq 0 \Rightarrow s$ nicht $\substack{\text{pos}\\\text{neg}}$ definit. $(*)$

Sei $\mathcal{B}$ Basis von V mit

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für } n = \dim V < \infty \text{ und } \mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$(*) \Rightarrow$ Es ex i, j mit $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

$\Rightarrow s(b_i, b_i) = \lambda_i < 0 < \lambda_j = s(b_j, b_j)$ $\square$

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

20 Punkte

Aufgabe 5:

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit einzigem Eigenwert 1.

Beweisen Sie: $F - \mathrm{Id}_V$ ist nilpotent.

Da V komplexer VR zerfällt $P_F(x)$ in Linearfaktoren.

$\Rightarrow F$ trigonalisierbar.

Sei $\mathcal{B}$ Basis von V mit

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ für } n = \dim V < \infty.$$

Dann ist $M_{\mathcal{B}}(F - \mathrm{Id}_V) = M_{\mathcal{B}}(F) - M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent, da $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}^n = 0 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

$\Rightarrow F - \mathrm{Id}_V$ nilpotent. $\boxtimes$

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ______

20 Punkte

Aufgabe 6:

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal mit $F(U) \subseteq U^\perp$.

Beweisen Sie: $U \subseteq F(U^\perp)$.

$F(U) \subseteq U^\perp \Rightarrow$ f.a. $u, v \in U$ gilt $\langle F(u), v \rangle = 0$.

Da F orthogonal ist F invertierbar

und $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F^{-1}(v) \rangle = 0$ f.a. $u, v \in U$.

$\Rightarrow F^{-1}(v) \in U^\perp$ f.a. $v \in U$.

$\Rightarrow U \subseteq F(U^\perp)$ $\square$