# Lösungen für das 13. Übungsblatt zur Lin. Alg. II

## Aufgabe 13.1

1. z.z: $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$\langle x, y \rangle = x^T A^T A y$ Skalarprodukt

$\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$

Bew: „$\Leftarrow$" $x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = (Ax, Ax)$

Std. Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

da $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow (Ax, Ax) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. definit

$(A^T A)^T = A^T A^{T^T} = A^T A \Rightarrow A^T A$ symmetrisch

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt

„$\Rightarrow$" $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt

$\Rightarrow x^T A^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow (Ax, Ax) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow Ax \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow A$ invertierbar $\Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$ //

2. z.z: $\langle x, y \rangle = x^T y$ nicht positiv definit auf $\mathbb{C}^n$

Bew: sei $x = \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = x^T x = \sum_{j=1}^{n} i^2 = -n < 0 \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht positiv definit.

~~pos~~

Diese Bilinearform ist nicht ausgeartet, da die Darstellungsmatrix die Identität ist.

BRUNNEN

## Aufgabe 13.2

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Berechnung eines Orthogonalen Systems $w_1', w_2', w_3'$:

$w_1' = v_1$

$$w_2' = v_2 - \frac{\langle w_1', v_1\rangle}{\langle w_1', w_1'\rangle} \cdot w_1'$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \frac{\langle w_1', v_3\rangle}{\langle w_1', w_1'\rangle} \cdot w_1' - \frac{\langle w_2', v_3\rangle}{\langle w_2', w_2'\rangle} w_2'$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Normieren von $w_1', w_2', w_3'$ führt zur gewünschten ONB.

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{\|w_1'\|} w_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\|w_2'\|} w_2' = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\|w_3'\|} w_3' = \frac{\cancel{3}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.3

$A := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Ges: ONB aus Eigenvektoren von $A$

Rechnung:

1. $P_A(x) = \det(A - x \cdot id) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - x & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = (\cos\varphi - x)^2 + (\sin\varphi)^2$

$$= x^2 - 2\cos\varphi\, x + \underbrace{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2}_{=1}$$

$$= x^2 - 2\cos\varphi\, x + 1$$

2. NST von $P_A(x)$: nach p-q-Formel

$$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{(\cos\varphi)^2 - 1}$$

$$= \cos\varphi \pm \sqrt{-(\sin\varphi)^2}$$

$$= \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

3. Eigenräume/vektoren:

$Eig(\lambda_1, A) = \ker(A - \lambda_1) = \ker\begin{pmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$

$Eig(\lambda_2, A) = \ker(A - \lambda_2) = \ker\begin{pmatrix} i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & i\sin\varphi \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Wähle $B = \left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{= b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}}_{= b_2}\right\}$

$\Rightarrow$

$\|b_1\| = 1,\ \|b_2\| = 1 \ \wedge\ \langle b_1, b_2 \rangle = b_1^T \overline{b_2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-i + i)$$

$$= 0$$

# Aufgabe 13.4

$w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$

1. z.z.: $S = E - 2ww^T \Rightarrow S^T S = id$

Beweis:

$$S^T = (E - 2ww^T)^T = E^T - 2(ww^T)^T = E - 2ww^T$$

$$\Rightarrow S^T S = S^2$$

$$= (E - 2ww^T)^2 = E^2 - 4ww^T + 4(ww^T)^2$$

$$(ww^T)^2 = w \underbrace{w^T w}_{= \langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1} w^T = w \cdot w^T$$

$$\Rightarrow E^2 - 4ww^T + 4(ww^T)^2 = E - 4ww^T + 4ww^T = E \ //$$

2. z.z: $v = \lambda w + w'$, $w' \in \operatorname{span}(w)^\perp$

$$\Rightarrow Sv = -\lambda w + w'$$

Bew:

$$Sv = Ev - 2ww^T v$$

$$= v - 2ww^T (\lambda w + w')$$

$$= \lambda w + w' - 2ww^T \lambda w - 2w \underbrace{w^T w'}_{= 0, \text{ da } w' \in \operatorname{span}(w)^\perp}$$

$$= \lambda w + w' - 2\lambda w \underbrace{w^T w}_{= 1}$$

$$= -\lambda w + w' \ //$$