FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

Klausur

10. Februar 2016

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: —

Ergebnis auf Website (ja/nein): —

- Tragen Sie bitte auf jeder Seite **Ihren Namen** und **Ihre Matrikelnummer** ein.
- Diese Klausur besteht aus **sechs Aufgaben** zu je 20 Punkten.
- Aufgabe 1 ist eine **Ankreuz-Aufgabe**, Begründungen sind nicht erforderlich.
  - Eine **richtige Antwort** gibt 2 Punkte,
  - eine **nicht gegebene Antwort** gibt 1 Punkt, und
  - eine **falsche Antwort** gibt 0 Punkte.
- Denken Sie in den Aufgaben 2–6 daran, jeden Schritt gut zu begründen.
- Schreiben Sie in den Aufgaben 2–6 auch Ansätze und Ideen auf, selbst wenn Sie nicht sehen, ob oder wie diese zur Lösung führen werden.
- Benutzen Sie zum Nachdenken und für Proberechnungen Schmierpapier.
- **Einziges erlaubtes Hilfsmittel** ist ein eigenständig beschriebener DIN A4 Zettel.
- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt **90 Minuten**.
- Klausureinsicht ist am 15. Februar 2016, weitere Details auf der Webseite der VL.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte								

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 1: 20 Punkte

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen **W**ahr oder **F**alsch sind:

W **F**

☑ ☐ Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt für das charakteristische Polynom $P_F(X)$:

$$\mathrm{grad}\left(P_F(X)\right) = \dim V.$$

☑ ☐ Es existiert eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, so dass A und A^T verschiedene Eigenvektoren haben.

☑ ☐ Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$. Dann gilt:

$$A, B \text{ ähnlich} \Rightarrow \det(A) = \det(B).$$

☐ ☑ Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch mit $\lambda \leq 0$ for jeden Eigenwert λ von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt: A ist negativ definit.

☑ ☐ Sei V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann hat F einen Eigenvektor.

☐ ☑ Jedes Erzeugendensystem eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums enthält eine Orthonormalbasis.

☑ ☐ Sei F ein unitärer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F.

☑ ☐ Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, die nur den Eigenwert 0 hat, ist nilpotent.

☑ ☐ Sei $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ orthogonal. Dann ist F eine Drehung oder eine Spiegelung.

☐ ☑ Es existiert eine unitäre Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, die nilpotent ist.

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 2: 20 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 \\ -12 & 2 & 12 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass -1 ein Eigenwert von A ist und bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A trigonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenräume und Haupträume von A durch Angabe von Basen.

(a) $P_A(X) \underset{\text{Entwicklung nach 2. Spalte}}{=} (2-X)\left(\det\begin{pmatrix} -7-X & 9 \\ -6 & 8-X \end{pmatrix}\right)$

$= (2-X)\left((-7-X)(8-X)+54\right)$

$= (2-X)(X-2)(X+1) = -(X-2)^2(X+1)$

(b) $P_A(X)$ zerfällt $\Rightarrow A$ trigonalisierbar nach VL

(c) $\mathrm{Eig}(A;2) = \ker(A - 2E_3) = \ker\begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -12 & 0 & 12 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \underset{\text{alg. = geom. Vielf.}}{=} \mathrm{Hau}(A;2)$

$\mathrm{Eig}(A;-1) = \ker(A + E_3) = \ker\begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 \\ -12 & 3 & 12 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right\} \underset{\text{alg. = geom. Vielf.}}{=} \mathrm{Hau}(A;-1)$

Probe: $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ✓

(nicht notwendig) $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ✓

$A\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ ✓

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 3: 20 Punkte

Sei die symmetrische Bilinearform s auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x,y) = x^T A y$ für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 17 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

(a) **Beweisen Sie**: s ist positiv definit.

(b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so dass $M_{\mathcal{B}}(s) = E_3$ die Einheitsmatrix ist.
Hinweis: Konstruieren Sie dazu ein $C \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit $C^T A C = E_3$.

(b)

$$\begin{array}{ccc|ccc|l|ccc}
 & & & 4 & 2 & 4 & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 2 & 2 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 4 & 0 & 17 & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & & 1 & 0 & -1 \\
2 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 & (3) \to (3) - (1) & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 13 & 0 & -2 & 13 & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & & 1 & -1 & -1 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 4 & -4 & (2) \to 2(2) - 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -2 & 13 & 0 & -4 & 13 & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & & 1 & -1 & -2 \\
0 & 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & (3) \to (3) + (2) & 0 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & & 0 & 0 & 1
\end{array} =: C'$$

$$\Rightarrow {}^tC' A C' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2$$

$$\Rightarrow C = C' \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

und ${}^tCAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{=v_3} \Big\} \text{ liefert } M_{\mathcal{B}}(s) = E_3$$

nicht notwendig

<u>Probe</u>: $s(v_i, v_j) = {}^tv_i A v_j = \delta_{ij}$

(a) Aus ${}^tCAC = E_3$ folgt, dass s positiv definit.

Name: Musterlösung   Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 4: 20 Punkte

Sei $s\colon V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $s(w_1, w_2) = 0$ für alle $w_1, w_2 \in W$.

Beweisen Sie: $2 \dim W \leq \dim V$.

Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V mit

$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$ Basis von W. ⊛

Dann

$$M = M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{m} & \underbrace{\quad}_{n-m} \end{array} \end{array}$$

s nicht ausgeartet $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} M = n$. $\Rightarrow$ Zeilen von M linear unabhängig.

Zeilen $1-m$ enthalten höchstens $\min\{m, n-m\}$ viele lin. unabh. Vektoren.

$\Rightarrow$ $n-m + \min\{m, n-m\} = n$

$\Rightarrow$ $\min\{m, n-m\} = m$

$\Rightarrow$ $m \leq n-m$ $\Rightarrow$ $2m = 2 \dim W \leq n = \dim V$

$\square$

⊛ Existiert nach Basisergänzungssatz.

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 5: 20 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $0 \neq F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.

Beweisen Sie: Es existiert ein $v \in V$ mit $\langle F(v), v \rangle \neq 0$.

1. Lösung:

F selbst-adj $\Rightarrow$ F diagonalisierbar $\underset{F \neq 0}{\Rightarrow}$ F hat EW $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ Es ex $v \in V$ mit $F(v) = \lambda v$ und $v \neq 0$.

$\Rightarrow \langle F(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 \underset{v \neq 0}{\neq} 0$

$\square$

2. Lösung:

Sei $v \neq 0$ mit $F(v) = w \neq 0$ (ex, da $F \neq 0$).

Dann $\langle F(v+w), v+w \rangle = \langle F(v), v \rangle$

$+ \langle F(w), w \rangle$

$+ \langle F(v), w \rangle$

$+ \langle F(w), v \rangle$

F selbst-adj.

$\overset{\text{F selbst-adj.}}{=} \langle F(v), v \rangle + \langle F(w), w \rangle + 2 \langle F(v), w \rangle$

$= \langle F(v), v \rangle + \langle F(w), w \rangle + \underbrace{2 \langle w, w \rangle}_{\neq 0, \text{ da } w \neq 0}$

$\Rightarrow \langle F(v), v \rangle \neq 0$ oder

$\langle F(w), w \rangle \neq 0$ oder

$\langle F(v+w), v+w \rangle \neq 0$

$\square$

Name: Musterlösung Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 6: 20 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $F \circ F = F$.

Beweisen Sie:

(a) Ist λ ein Eigenwert von F, so gilt $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) F ist diagonalisierbar. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Eig}(F; 0) \oplus \mathrm{Eig}(F; 1)$.

(a) Sei λ Eigenwert zu Eigenvektor $v \neq 0$

Dann $\lambda v = F(v) = F(F(v)) = F(\lambda v) = \lambda^2 v$.

Da $v \neq 0$ folgt $\lambda = \lambda^2$ und somit $\lambda \in \{0, 1\}$

(b) (i) $\mathrm{Eig}(F; 0) \cap \mathrm{Eig}(F; 1) = \{0\}$. ⊛

(ii) Sei also $v \in V$ und schreibe $v = F(v) + (v - F(v))$

Dann $F^2(v) = F(v)$ und somit $F(v) \in \mathrm{Eig}(F; 1)$

Außerdem $F(v - F(v)) = F(v) - F(v) = 0$

$\Rightarrow v - F(v) \in \mathrm{Eig}(F; 0)$

$\overset{(i),(ii)}{\Rightarrow} V = \mathrm{Eig}(F; 0) \oplus \mathrm{Eig}(F; 1)$

$\Rightarrow$ V hat Basis aus Eigenvektoren von F

$\Rightarrow$ F diagonalisierbar $\square$

⊛ Da $v \in \mathrm{Eig}(F; 0) \cap \mathrm{Eig}(F; 1)$ impliziert, dass $F(v) = 0 \cdot v = 1 \cdot v$ und somit $v = 0$.