Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
`www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2`

1. Übungsblatt

Abgabe: 26. Oktober 2015

Aufgabe 1.1: 5 Punkte

Sei G eine Gruppe wie in der Vorlesung definiert. Bezeichne $e \in G$ das neutrale Element. Für $a \in G$ sei $a^{-1} \in G$ das inverse Element. Zeigen Sie:

1. Für jedes $b \in G$ gilt $b * e = b$ und $b * b^{-1} = e$.
2. Für alle $b, c, c' \in G$ gilt: aus $b * c = b * c'$ folgt $c = c'$, und aus $c * b = c' * b$ folgt $c = c'$.

Aufgabe 1.2: 5 Punkte

Sei $m > 0$. Sei $\mathbb{Z}_m$ der Restklassenring. Zeigen Sie, $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn m prim ist.

Diskutieren Sie den Fall $m = 0$.

Aufgabe 1.3: 5 Punkte

Sei G eine Gruppe, sei $a \in G$ fest. Betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau_a &\colon G \to G, \quad x \mapsto x * a \\ {}_a\tau &\colon G \to G, \quad x \mapsto a * x \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. Die Abbildungen τ_a und ${}_a\tau$ sind bijektiv.
2. Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$, und definiere Abbildungen τ_a und ${}_a\tau$ wie oben. Wenn τ_a und ${}_a\tau$ bijektiv sind, dann ist G schon eine Gruppe.

Aufgabe 1.4: 5 Punkte

Betrachte das regelmäßige 8-Eck A mit Eckenmenge $\{a_1, \dots, a_8\}$. (Zur Veranschaulichung können Sie sich A als Teilmenge von $\mathbb{C}$ vorstellen, dann sei a_k der Punkt $e^{2\pi ik/8} \in \mathbb{C}$.)
Eine *Isometrie* von A bildet die Menge der Ecken bijektiv auf die Menge Ecken ab, so dass benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken gehen.

1. Zeigen Sie: Die Menge der Isometrien von A bildet eine Gruppe.
2. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente dieser Gruppe.