Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

2. Übungsblatt

Abgabe: 2. November 2015

Aufgabe 2.1: 5 Punkte

1. Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Welche davon sind Isomorphismen?
2. Fassen Sie nun $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Ringe auf. Welche der obigen Abbildungen sind Ringhomomorphismen?

Aufgabe 2.2: 5 Punkte

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. f ist bijektiv.
2. Es gibt einen Gruppenhomomorphisms $g \colon H \to G$, mit $f \circ g = \mathrm{id}_H$ und $g \circ f = \mathrm{id}_G$.

Zeigen Sie die analoge Aussage für einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi \colon V \to W$.

Aufgabe 2.3: 5 Punkte

Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Sei $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, eine Basis von V.

1. Zeigen Sie: $f(v_i) \in W$, $1 \leq i \leq n$, ist ein Erzeugendensystem von W.
2. Sie m die Dimension von W. Zeigen Sie, dass für $m < n$ die $f(v_i)$ keine Basis von W bilden. Was ist für $m \geq n$?

Aufgabe 2.4: 5 Punkte

Hinweis: Benutzen Sie Polynomdivision für die folgenden Aufgaben.

1. Betrachte das Polynom $p \in \mathbb{Z}[t]$,
$$p(t) := t^4 - 2t^3 - 11t^2 + 42t - 40,$$
Die Zahlen -4 und 2 sind Nullstellen von p. Bestimmen Sie *alle* Nullstellen von p als Polynom in $\mathbb{C}[t]$.
2. Nun fassen Sie p als Polynom in $\mathbb{R}[t]$ auf. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass sich jedes Polynom in $\mathbb{R}[t]$ eindeutig in Linearfaktoren und quadratische Terme zerlegen lässt. Geben diese Zerlegung für p an.