Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

3. Übungsblatt

Abgabe: 9. November 2015

Aufgabe 3.1: 5 Punkte

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei die lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_1 + 2x_3).$$

1. Geben Sie die Matrix $M_{\mathcal{A}}(F)$ von F bezüglich der Standardbasis $\mathcal{A}$ des $\mathbb{R}^3$ an.
2. Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ an, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F)$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3.2: 5 Punkte

Sei $E_r \in \mathrm{Mat}(r \times r; K)$ die Einheitsmatrix über dem Körper K. Sei δ_{ij} definiert als $\delta_{ij} = 0$, falls $i \neq j$ und als $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$.
Sei $\lambda \in K$. Sei $Q_i^j(\lambda)$, $i \neq j$, die $(r \times r)$-Matrix $Q_i^j(\lambda) := E_r + (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \cdot \lambda)_{kl}$.

1. Bestimmen Sie für $\lambda \neq 0$ das Inverse der Matrix $S_i(\lambda)$ aus der Vorlesung.
2. Zeigen Sie, dass $Q_i^j(\lambda)Q_i^j(\gamma) = Q_i^j(\lambda + \gamma)$.
3. Zeigen Sie, dass $Q_i^j(\lambda)$ für alle $\lambda \in K$ invertierbar ist, und bestimmen Sie die Inverse.

Hinweis: Die Matrix $Q_i^j(\lambda)$ wird für $\lambda = 1$ zur Matrix Q_i^j aus der Vorlesung. Wenn A eine Matrix mit r Zeilen ist, dann ist $Q_i^j(\lambda)A$ die Matrix, die aus A durch Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile entsteht.

Aufgabe 3.3: 5 Punkte

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei X die Matrix

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4a \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, für welche a das Inverse von X existiert und berechnen Sie es mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen $S_i(\lambda)$, Q_i^j und $Q_i^j(\lambda)$.

Aufgabe 3.4: 5 Punkte

Gegeben seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A := \begin{pmatrix} -25 & 10 & -6 & -21 \\ -40 & 14 & -6 & -36 \\ 10 & -1 & -3 & 12 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass A und B äquivalent sind. **Hinweis:** Sie können zum Beispiel Zeilen- und Spaltenumformungen ähnlich wie in Aufgabe 3.3. verwenden.
2. Berechnen Sie die Dimensionen des Bildes und des Kernes von A, aufgefasst als lineare Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$.