Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
`www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2`

# 4. Übungsblatt

**Abgabe: 16. November 2015**

**Aufgabe 4.1:** 5 Punkte

Sei $C \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $C$ und die dazugehörigen Eigenräume.

**Aufgabe 4.2:** 5 Punkte

Sei $B_\alpha$ die Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Gerade mit Steigung $\alpha/2$ aus der Vorlesung,

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \text{ seien } b_1 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, b_{-1} := \begin{pmatrix} \cos((\alpha+\pi)/2) \\ \sin((\alpha+\pi)/2) \end{pmatrix}.$$

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die $b_i$ Eigenvektoren zum Eigenwert $i$ sind. Sie bilden ausserdem eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Sei $\alpha = \pi/2$. Sei $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Berechnen Sie $B_\alpha x$.
2. Schreiben Sie $B_\alpha x$ als Linearkombination $B_\alpha x = s_1 b_1 + s_{-1} b_{-1}$ der Basisvektoren $b_i$, d.h. bestimmen Sie die $s_i$.
3. Schreiben Sie $x$ als Linearkombination $t_1 b_1 + t_{-1} b_{-1}$ der Basisvektoren $b_i$.
4. Berechnen Sie $B_\alpha x$ erneut, diesmal indem Sie die Linearität von $B_\alpha$ und $x = t_1 b_1 + t_{-1} b_{-1}$ benutzen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Teil 2.
5. Geben Sie die Matrix von $B_\alpha$ bezüglich der Basis $b_i$ an.
6. Zeichnen Sie im einem Koordinatensystem die Eigenräume von $B_\alpha$, sowie $x$ und $B_\alpha x$ ein.

**Hinweis:** $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(bitte wenden)

**Aufgabe 4.3:** 5 Punkte

Sei $A$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Determinante von $A$ mittels der Leibnizformel, Satz 1.2.22 aus der Vorlesung.

2. Berechnen Sie die Determinante von $A$ mittels des Entwicklungssatzes von Laplace, Satz 1.2.27 aus der Vorlesung.

3. Berechnen Sie die Determinante von $A$ mittels elementarer Zeilenumformungen $S_i(\lambda)$, $Q_i^j$ und $Q_i^j(\lambda)$.

4. Berechnen Sie das Inverse von $A$ mittels der komplementären Matrix, Satz 1.2.25 aus der Vorlesung.

**Aufgabe 4.4:** 5 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ zum Eigenvektor $v$.

1. Zeigen Sie, dass $v$ ein Eigenvektor sowohl von $A^2$ als auch von $A^{-1}$ ist, und berechnen Sie die dazugehörigen Eigenwerte.

2. Sei $w$ ein Eigenvektor von $A^2$ zum Eigenwert $\mu$. Geben Sie ein Beispiel an, dass $w$ kein Eigenvektor von $A$ sein muss. ( **Hinweis:** Betrachten Sie $n = 2$ und Drehmatrizen.)