FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

5. Übungsblatt

Abgabe: 23. November 2015

Aufgabe 5.1: 5 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.
3. Benutzen Sie Teil 1 und 2, um A^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

Aufgabe 5.2: 5 Punkte

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$.

1. Setzen Sie $(b_{ij}) = B := A^2$. Zeigen Sie, $b_{ij} = 0$ für $i + 1 \geq j$.
2. Zeigen Sie, dass A **nilpotent** ist, d.h. es existiert ein m mit $A^m = 0$.

Aufgabe 5.3: 5 Punkte

Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes. Für jedes $v \in V$ gebe es ein $\lambda_v \in K$, so dass $F(v) = \lambda_v v$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in K$ so dass $F = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$.

Aufgabe 5.4: 5 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Jede Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hat einen Eigenvektor.
2. Es gibt eine Matrix $P \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, so dass die Vektoren $(a, 0, 0, \ldots, 0, 0)^T$, $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, die einzigen Eigenvektoren von P sind.
3. Wenn n ungerade ist, dann hat jede Matrix $N \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ einen Eigenvektor.
4. Wenn n gerade ist, dann gibt es eine Matrix $Q \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, die keinen Eigenvektor hat.