Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

6. Übungsblatt

Abgabe: 30. November 2015

Aufgabe 6.1: 5 Punkte

Sei $L \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix

$$L := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 27 & -36 & -108 \\ 0 & -9 & 15 & 36 \\ 0 & 9 & -13 & -36 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

1. L ist trigonalisierbar.
2. Finden Sie eine Basis $\mathcal{A}$, so dass $M_{\mathcal{A}}(L)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
3. Geben Sie eine L-invariante Fahne an.

Aufgabe 6.2: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K, sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$ die Form
$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
hat, wobei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$, mit $n, m \geq 1$.
2. Es gibt einen F-invarianten Unterraum $U \subseteq V$ mit $0 \neq U \neq V$.

Aufgabe 6.3: 5 Punkte

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ beide diagonalisierbar.

1. Nehmen Sie an, dass $\mathcal{C}$ sowohl eine Basis aus Eigenvektoren für A als auch für B ist. Zeigen Sie, dass dann A und B kommutieren.
2. Finden Sie A, B diagonalisierbar, so dass $AB \neq BA$ gilt.

Aufgabe 6.4: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $F^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion über $\dim V$, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$.

(So ein Endomorphismus heißt **nilpotent**, vgl. Aufgabe 5.2.)