Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

7. Übungsblatt

Abgabe: 7. Dezember 2015

In dieser Version des Blattes wurden Fehler in Aufgabe 7.1 korrigiert.

Aufgabe 7.1: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}(f)$ die Form
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
hat, wobei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$, mit $n, m \geq 1$.

2. Es gibt Unterräume $U, W \subseteq V$ mit $0 \neq U \neq V$, $0 \neq W \neq V$ und $U + W = V$, so dass $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$ gilt.

3. Es gibt Vektorräume P, Q, wobei $P \neq 0 \neq Q$, und Endomorphismen $g\colon P \to P$, $h\colon Q \to Q$, sowie einen Isomorphismus $\varphi\colon P \oplus Q \to V$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} P \oplus Q \arrow[r, "g \oplus h"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \oplus Q \arrow[d, "\varphi"'] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Aufgabe 7.2: 5 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 19 \\ 0 & 6 & -9 & -27 \\ 0 & -14 & 21 & 54 \\ 0 & 6 & -9 & -24 \end{pmatrix}$$
Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $(x-3)^2 x^2$.

1. Berechnen Sie die Zerlegung von $\mathbb{R}^4$ in Haupträume bezüglich A.

2. Geben Sie für jeden Eigenwert λ die Dimensionen der Kerne von $(A - \lambda E_4)^n$ für jedes $n \geq 0$ an. (Sie können bei $n = 2$ aufhören zu rechnen, warum?)

3. Folgern Sie aus Teil 2, wie die Jordansche Normalform für A aussehen muss. (Sie müssen keine Basis angeben.)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.3: 5 Punkte

Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. F ist nilpotent, d.h. es existiert ein $k \geq 0$ mit $F^k = 0$.
2. Für das charakteristische Polynom P_F gilt $P_F = \pm X^n$.
3. $F^n = 0$.

Aufgabe 7.4: 5 Punkte

Sei $H \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}_5)$ die folgende Matrix über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}_5$.

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und Aufgabe 7.3, dass H nilpotent ist.
2. Fassen Sie nun H mit diesen Einträgen als Matrix über $\mathbb{Z}$ auf. Zeigen Sie, dass H über $\mathbb{Z}$ nicht nilpotent ist. **Hinweis:** Sie können H auch als Matrix in $\mathbb{Q}$ auffassen.