Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

8. Übungsblatt

Abgabe: 14. Dezember 2015

Aufgabe 8.1: 5 Punkte

1. Sei $M \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix
$$M := \begin{pmatrix} 6 & -9 & 27 \\ -5 & 6 & -18 \\ -3 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$
Es gilt $P_M = -X^3$. Bestimmen Sie einen Jordan-Strang von M mit maximaler Länge.

2. Sei $N \in \mathrm{Mat}(10 \times 10, \mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix. Sei $\dim\ker N^1 = 3$, $\dim\ker N^2 = 6$, $\dim\ker N^3 = 7$. Geben Sie die Jordan-Matrix zu N an.

Aufgabe 8.2: 5 Punkte

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$ eine Matrix. Beweisen Sie den Satz von Caley-Hamilton für A auf zwei Arten.

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom P_A von A.

2. Berechnen Sie $P_A(A) \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$.

Wie in der Vorlesung bezeichne jetzt $K[A] \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$ den von A erzeugten kommutativen Unterring. Sei $A' \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K[A])$ die Matrix $A' := (a_{ij} \cdot E_2)$.

3. Berechnen Sie $B := A' - A \cdot E_r$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, K[A])$.

   Hinweis: “$A \cdot E_r$” ist hier Skalar- und nicht Matrixmultiplikation.

4. Berechnen Sie $\det(B) \in K[A]$.

Aufgabe 8.3: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $F^k = \mathrm{Id}_V$ für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Potenzen eines Jordan-Blocks.

Aufgabe 8.4: 5 Punkte

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie: Ist für alle i die Summe $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$, so ist $|\lambda| < 1$.