Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

9. Übungsblatt

Abgabe: 4. Januar 2016

☺ Frohe-Weihnachten-Doppelblatt ☺

(20 Punkte + 20 Zusatzpunkte, inklusive Weihnachts-Selbstreflektion)

Aufgabe 9.1: 5 Punkte

Weihnachts-Selbstreflektion Teil 1. **Bitte auf eigenem Blatt abgeben!**

1. Skizzieren Sie den bisherigen Vorlesungsverlauf in 10-15 Punkten (in einem ersten Durchgang bitte ohne die Mitschrift durchzuschauen).
2. Diskutieren Sie jeden dieser Punkte in Ihrer Übungsgruppe und formulieren Sie zu den verschiedenen Punkten Fragen, die Sie nicht in der Gruppe lösen konnten.
3. Lesen und diskutieren Sie den auf der Website verlinkten Text "Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?".

Aufgabe 9.2: 5 Punkte

Sei $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die folgende folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$:

$$b(x, y) := ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2\,x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 4\,x_2y_2$$

1. Sei $\mathcal{A}$ die Standdardbasis von $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}}(b)$ von b bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ an. Zeigen Sie, dass b symmetrisch ist.
2. Sei $\mathcal{B}$ die Basis $(-1, 2), (2, -1)$ von $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an.

Aufgabe 9.3: 5 Punkte

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und sei s die symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$M_{\mathcal{B}}(s) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie den Ausartungsraum von s abhängig von α.
2. Sei $\alpha = 0$. Berechnen Sie die Menge aller $v \in \mathbb{R}^2$, so dass $s(v, v) = 0$ und zeigen Sie, dass dies kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 9.4: 5 Punkte

Eine Bilinearform $s\colon V \times V \to K$ heiße *schiefsymmetrisch*, wenn $s(v, w) = -s(w, v)$ für alle $v, w \in K$ gilt. Zeigen Sie: Ist die Charakteristik von K ungleich 2, dann lässt sich jede Bilinearform in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform darstellen.

(bitte wenden)

Aufgabe 9.5: 5 Punkte

Weihnachts-Selbstreflektion Teil 2. **Bitte auf eigenem Blatt abgeben!**

1. Lesen Sie den auf der Website verlinkten Text zum "Unterrichtsbezug der Linearen Algebra in der Sekundarstufe II". Beschrieben Sie zu jeweils drei der von Ihnen in Aufgabe 9.1.1 genannten Punkte, in wie weit (insbesondere in Bezug auf eine spätere Lehrtätigkeit)
   - deren Behandlung Ihnen sinnvoll erscheint und Sie weitergebracht haben,
   - deren Behandlung Ihnen unsinnig erscheint.
2. Skizzieren Sie Ihre Ziele für die Vorlesung, und was Sie aus dieser Vorlesung mitnehmen möchten. Klären Sie mit sich selbst, was Sie tun müssen um diese Ziele zu erreichen.

Aufgabe 9.6: 5 Punkte

Sei $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

1. Zeigen Sie: Ist $b(v,v) = 0$ für alle $v \in V$, so ist b schiefsymmetrisch.
2. Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, und b ist schiefsymmetrisch, so ist $b(v,v) = 0$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 9.7: 5 Punkte

1. Sei $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass $V_R := \{w \in V \mid b(v,w) = 0 \text{ für alle } v \in V\}$ und $V_L := \{v \in V \mid b(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ Unterräume von V sind. Geben Sie ein Beispiel für b, so dass $V_L \neq V_R$.
2. Geben Sie eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform b' auf $\mathbb{R}^2$ an, so dass
$$b'(e_1, e_1) = b'(e_2, e_2) = 0.$$

Aufgabe 9.8: 5 Punkte

Betrachten Sie die Menge $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n)$ aller Bilinearformen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Mittels $(rb + sb')(v,w) := rb(v,w) + sb'(v,w)$ wird $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n)$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dieser hat die Dimension n^2.
2. Die Menge der symmetrischen Bilinearformen und die Menge der schiefsymmetrischen Bilinearformen sind Untervektorräume von $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n)$, mit den Dimensionen $n(n+1)/2$ bzw. $n(n-1)/2$.

Schöne Feiertage!