Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

10. Übungsblatt

Abgabe: 19. Januar 2016

Aufgabe 10.1: 5 Punkte

Sei $s\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(b)$ Diagonalform hat und geben Sie $M_{\mathcal{B}}(b)$ an.

Aufgabe 10.2: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gilt, wobei r der Rang von s ist.

Aufgabe 10.3: 5 Punkte

Sei Q eine Ellipse mit Längen der Hauptachsen a und b. Q ist nach Definition also die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sei $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidische Abstand.

1. Nehmen Sie $a \geq b$ an, und sei $c := \sqrt{a^2 - b^2}$. Sei $f := (c, 0), f' := (-c, 0)$.

   Zeigen Sie: $Q = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(f, p) + d(f', p) = 2a\}$.

   Hinweis: Sie müssen beide Richtungen, $\subseteq$ und $\supseteq$ zeigen.

2. Beschreiben Sie, wie Sie mit Hilfe von Teil 1 eine Ellipse mit gegebenen Längen der Hauptachsen a, b zeichnen, wobei Sie nur einen Bleistift, eine Schnur und zwei Stecknadeln verwenden dürfen.

Aufgabe 10.4: 5 Punkte

Sei K ein Körper und seien L, L' affine Unterräume von K^n.

1. Zeigen Sie, dass $L \cap L'$ ein affiner Unterraum von K^n ist, wenn $L \cap L' \neq \varnothing$.

2. Zeigen Sie, dass es L, L' mit $\dim L = \dim L' = n - 1$ gibt, so dass $L \cap L' = \varnothing$.