Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

11. Übungsblatt

Abgabe: 25. Januar 2016

Aufgabe 11.1: 5 Punkte

1. Sei G die Drehung um $\pi/2$ um den Punkt $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ (gegen den Uhrzeigersinn). Beschreiben Sie G als Affinität und geben Sie die dazugehörige erweiterte Matrix an.
2. Sei $g(x) = b + Ax$ eine affin lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Ist $A \neq \mathrm{Id}$, dann hat g einen Fixpunkt. (Ein Fixpunkt ist ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = x$.)

Aufgabe 11.2: 5 Punkte

Sei $f(x) = b + Ax$ eine lineare Abbildung $K^n \to K^n$. Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$ die dazugehörige erweiterte Matrix.

1. Zeigen Sie: f ist genau dann eine Affinität, wenn $A \in \mathrm{GL}(n;K)$.
2. Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, sei $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dann ist f eine Affinität. Berechnen Sie die inverse Affinität von f, also die eindeutige Abbildung f^{-1} mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in K^n$.
3. Sei nun f eine Affinität. Sei f^{-1} die inverse Affinität. Zeigen Sie, dass B^{-1} die erweiterte Matrix von f^{-1} ist.

Aufgabe 11.3: 5 Punkte

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -15 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei Q die Quadrik, die durch A gegeben ist. Zeigen Sie, dass Q eine Ellipse ist, indem Sie eine affine Transformation (Affinität) f finden, die Q auf den Einheitskreis $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ abbildet.

Aufgabe 11.4: 5 Punkte

Betrachten Sie die Quadrik Q, die durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bringen Sie Q auf affine Normalform indem Sie eine Affinität $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ finden, so dass die Matrix von $f(Q)$ Diagonalform hat.
Hinweis: Benutzen Sie die Umformungen wie für Normalformen von symmetrischen Bilinearformen mit der Einschränkung, dass Sie nur Affinitäten benutzen können.