Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
`www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2`

12. Übungsblatt

Abgabe: 1. Februar 2016

Aufgabe 12.1: 5 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ die symmetrische Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, ohne das Haupt-Minoren-Kriterium zu benutzen: Ist $a > 0$ und $\det A > 0$, so ist A positiv definit.

Aufgabe 12.2: 5 Punkte

Sei B die folgende symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$ und D die folgende hermitesche Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 19 & 9 \\ 4 & 9 & 17 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2i & -3i \\ -2i & 24 & -18 \\ 3i & -18 & 17 \end{pmatrix}.$$

1. Finden Sie eine Matrix C mit $B = C^T C$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der durch B gegebenen Bilinearform ein euklidischer Vektorraum ist.
3. Finden Sie eine Matrix E mit $D = E^T \overline{E}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ zusammen mit der durch D gegebenen hermiteschen Form ein unitärer Vektorraum ist.

Aufgabe 12.3: 5 Punkte

Seien G, H die Matrizen

$$G := \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & -2 & -9 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ -9 & -6 & 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \qquad H := \begin{pmatrix} -8 & 1 & 9 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -5 & -7 & 5 \\ -10 & -1 & -7 & -23 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie mittels geeigneter Kriterien aus der Vorlesung, ob diese jeweils positiv definit oder negativ definit sind.

Aufgabe 12.4: 5 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Man definiert:

$$U^\perp := \{u' \in U \mid \langle u', u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

1. Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass $U^\perp \oplus U = V$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.