FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump, Mark Ullmann

Lineare Algebra II (lehramtsbezogen)
Wintersemester 2015/16
www.mathseminar.org/2015/LineareAlgebra2

13. Übungsblatt

Abgabe: 8. Februar 2016

Aufgabe 13.1: 5 Punkte

1. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n\times n; \mathbb{R})$ eine Matrix. Zeigen Sie: $\langle x, y\rangle := x^T A^T Ay$ ist ein Skalarprodukt genau dann, wenn A invertierbar ist.
2. Zeigen Sie, dass die durch $\langle x, y\rangle = x^T y$ definierte Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$ nicht positiv definit ist. Untersuchen Sie auch, ob diese Form ausgeartet ist.

Aufgabe 13.2: 5 Punkte

Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu erhalten.

Aufgabe 13.3: 5 Punkte

Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ die Drehmatrix zu $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$A := \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Aufgefasst als Matrix über $\mathbb{C}$ ist A eine unitäre Matrix. Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 13.4: 5 Punkte

Sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $||w|| = 1$.

1. Zeigen Sie, dass die Matrix $S = E - 2ww^T$ orthogonal ist.
2. Ist $v = \lambda w + w'$ mit $w' \in \mathrm{span}(w)^\perp$, dann ist $Sv = -\lambda w + w'$.
   („S wirkt wie eine Spiegelung an $\mathrm{span}(w)^\perp$.“)