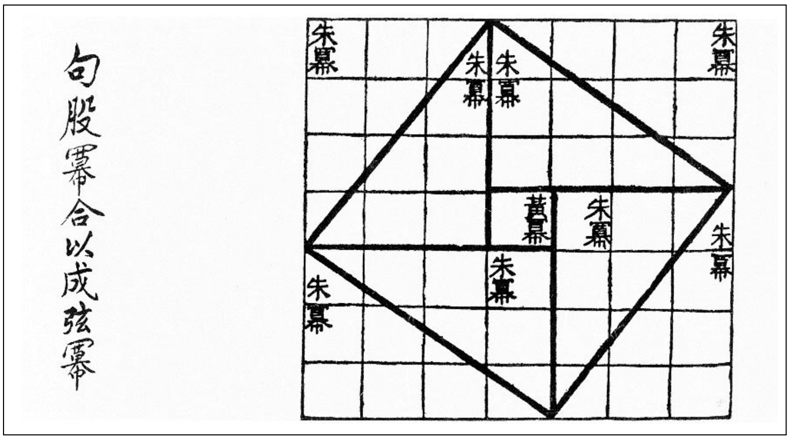
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Mathematisches Panorama*

Dr. Moritz Firsching, Dr. Jonathan Spreer

Sommersemester 2017

Blatt 2 Freitag, 27. X. 2017



Chou Pei Suan Ching, 500–200 v.Chr.

Aufgabe 5 (Wahre unbeweisbare Aussagen)

Finden Sie mathematische Aussagen, die sie für wahr halten, von denen sie aber nicht erwarten, dass sie jemals bewiesen werden können.

Aufgabe 6 (Der Satz des Pythagoras)

Betrachten Sie obige Abbildung, und benutzten sie diese um einen Beweis für den Satz des Pythagoras zu geben. Nennen sie einen weiteren Beweis für den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 7 (Fehlerhafte Beweise)

Welche Fehler können in einer mathematischen Argumentation auftreten? Finden sie Beispiele für Beweise, die sich später als fehlerhaft herausgestellt haben. Worin bestand der Fehler? Wurde inzwischen ein fehlerfreier Beweis gefunden?

Aufgabe 8 (Mathematischer Textsatz mit LaTeX)

Ordnen sie die umseitig aufgeführten Beispiele für LaTeX-Quellcode dem jeweilen output zu. Installieren Sie eine Version von (zum Beispiel für Linux *texlive*, für MacOS *TeXShop* oder für Windows *MiKTeX*) und benutzen Sie es um einen beliebigen Satz samt Beweis aufzuschreiben.

(1) `\left(\int \left|f(x)+g(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p} \leq`
`\left(\int \left|f(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p} +`
`\left(\int \left|g(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p}.`

(2) `=, \pi, e, \int, \log, \sin, \leq, \sqrt{}, \forall, \aleph`

(3)
```
\begin{tikzpicture}
 \draw[dashed,color=gray] (0,0) arc (-90:90:0.5 and 1.5);
 \draw[semithick] (0,0) -- (4,1);
 \draw[semithick] (0,3) -- (4,2);
 \draw[semithick] (0,0) arc (270:90:0.5 and 1.5);
 \draw[semithick] (4,1.5) ellipse (0.166 and 0.5);
 \draw (-1,1.5) node {$\varnothing d_1$};
 \draw (3.3,1.5) node {$\varnothing d_2$};
 \draw[|-,semithick] (0,-0.5) -- (4,-0.5);
 \draw[|->,semithick] (4,-0.5) -- (4.5,-0.5);
 \draw (0,-1) node {$x=0$};
 \draw (4,-1) node {$x=1$};
\end{tikzpicture}
```

(4)
```
\begin{tabular}{|r|l|}\hline
  7C0 & hexadecimal \\
  3700 & octal \\ \cline{2-2}
  11111000000 & binary \\
  \hline \hline
  1984 & decimal \\\hline
\end{tabular}
```

(5)
```
V (x_1, x_2, \ldots , x_n) =
\begin{pmatrix}
  1      & x_1    & x_1^2  & \cdots & x_1^{n-1} \\
  1      & x_2    & x_2^2  & \cdots & x_2^{n-1} \\
  1      & x_3    & x_3^2  & \cdots & x_3^{n-1} \\
  \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots    \\
  1      & x_n    & x_n^2  & \cdots & x_n^{n-1}
\end{pmatrix}
```

(6)
```
 \begin{tikzpicture}
   \path coordinate (A) at (0,0)
         coordinate (B) at (-60:12cm)
         coordinate (C) at (240:12cm);
   \foreach \density in {20,30,...,180}{%
       \draw[fill=blue!\density]
            (A)--(B)--(C)--cycle;
        \path (A) coordinate (X)
           -- (B) coordinate[pos=.15](A)
           -- (C) coordinate[pos=.15](B)
           -- (X) coordinate[pos=.15](C);}
 \end{tikzpicture}
```

(7)
```
\zeta(2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}
         = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}
           + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934
```

(8) `\det V(x_1,x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)`

Aufgabe 9 (Fehlerhafte Induktion) Betrachten sie folgenden fehlerhaften Beweis:

Behauptung: *Alle Menschen sind gleich alt*

Beweis durch Induktion: Wir zeigen, die Aussage

A: *In jeder endlichen Menge von Menschen haben alle das gleiche Alter.*

Dafür genügt es also für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

A_n: *In jeder Mengen von n Menschen habe alle das gleiche Alter.*

Induktionsanfang: A_1 gilt, denn in jeder einelementigen Menge von Menschen haben alle (nämlich nur dieser eine Mensch) das gleiche Alter.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass A_n gilt. Dann wollen wir zeigen, dass auch A_{n+1} gilt. Dafür bezeichne $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, M_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Menschen. Wir müssen also zeigen, dass alle Menschen in M das gleiche Alter haben. Wir betrachten zunächst $M \setminus \{m_{n+1}\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n\}$, dies ist eine Menge von n Menschen, die also nach A_n (unserer Induktionsvoraussetzung) alle das gleiche Alter haben. Es bleibt also nur zu zeigen, dass auch m_{n+1} das gleiche Alter hat wie alle Menschen in $M \setminus \{m_{n+1}\}$, also dass m_{n+1} das gleiche Alter hat wie m_n (oder auch m_{n-1} oder m_{n-2}, ...). Dafür betrachten wir die Menge $M \setminus \{m_1\} = \{m_2, m_3, \ldots, m_n, m_{n+1}\}$. Auch das ist eine Menge von n Menschen, so dass nach A_n, alle Menschen in $M \setminus \{m_1\}$ das gleiche Alter haben; insbesondere also auch m_{n+1} und m_n. Damit haben also alle Menschen in M das gleiche Alter und somit gilt A_{n+1} und die Induktion ist geführt. $\square$

Die Behauptung ist nun aber offensichtlich falsch! Wo steckt der Fehler in obiger Argumentation?

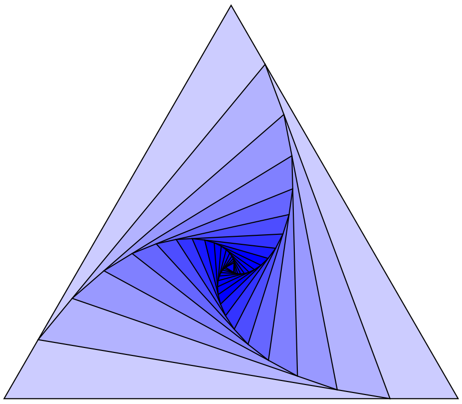
(A)

$$\det V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(B)

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934$$

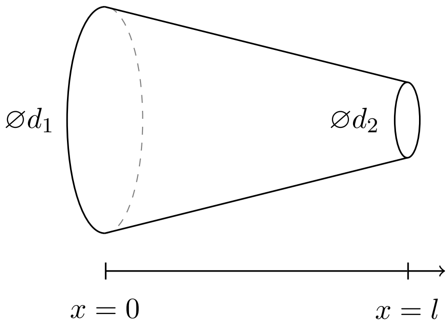
(C)



(D)

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(E)



(F)

$$=, \pi, e, \int, \log, \sin, \le, \surd, \forall, \aleph$$

(G)

$$\left(\int |f(x)+g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

(H)

7C0	hexadecimal
3700	octal
11111000000	binary
1984	decimal