Übungsaufgaben zur Vorlesung *Mathematisches Panorama*

Dr. Moritz Firsching, Dr. Jonathan Spreer

Sommersemester 2017

Blatt 3 Donnerstag, 2. XI. 2017

Leonhard Euler im Portrait von Emanuel Handmann, 1753

Aufgabe 9 (rationale Potenz irrationaler Zahlen)

Beweisen Sie oder widerlegen Sie: es gibt zwei irrationale Zahlen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass $a^b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 10 (Zahlendarstellungen mit unterschiedlichen Basen)

1. Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Basis	α	β	γ	δ	ε
2		1001001001			
3					202021
7				333	
10			100		
16	1A3				

2. Es sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die Zahl 1001_b keine Primzahl ist. (Hinweis: Manche Polynome lassen sich faktorisieren!)

Aufgabe 11 (Papiergrößen)

Ein rechteckiges Blatt mit Seitenlängen a und b habe den Flächeninhalt 1 000 000 und das Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Berechnen Sie a, b sowie $2^{-\frac{k}{2}}b$ für $k \in 1, 2, 3, 4$ auf einige Dezimalstellen. Zeigen Sie, dass wenn a und b das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ haben, dass dann auch b und $\frac{a}{2}$ in diesem Verhältnis stehen. Vergleichen Sie mit der folgenden Tabelle von Papiergrößen nach ISO 216 in mm.

DIN A0	DIN A1	DIN A2	DIN A3	DIN A4	DIN A5	DIN A6
841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297	148×210	105×148

Aufgabe 12 (Machins Formel)

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$, läßt sich arctan als konvergente Reihe wie folgt darstellen:

$$\arctan(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots.$$

Es folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Berechnen Sie die ersten paar Partialsummen dieser unendlichen Reihe.

Nutzen Sie die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

benannt nach John Machin, zusammen mit der Reihenentwicklung von arctan um die ersten drei Dezimalstellen von π zu berechnen. Wie viele Summanden von $\arctan \frac{1}{5}$ und $\arctan \frac{1}{239}$ werden mindestens dafür benötigt?

Für die Rechnungen in dieser Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

Zusatzinformation: Sobald man in der Lage ist, mit komplexen Zahlen zu rechnen ist man in der Lage obige Formel von Machin zu beweisen. Für eine komplexe Zahl $a + ib$ ist der zugehörige Winkel (nämlich der Winkel mit der reelen Achse) gegeben durch $\arctan \frac{b}{a}$. Die Multiplikation zweier Zahlen addiert deren Winkel.

Rechnet man nun in den komplexen Zahlen:

$$z = (5 + i)^4 \cdot (239 - i) = 114244 + 114244i,$$

so folgt, dass z den folgenden Winkel hat:

$$\arctan(z) = \arctan(114244 + 114244i) = \arctan\left(\frac{114244}{114244}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\arctan(z) &= \arctan\Big((5+i)^4 \cdot (239 - i)\Big) \\
&= \arctan\Big((5+i)^4\Big) + \arctan(239 - i) \\
&= 4 \arctan(5 + i) - \arctan(239 + i) \\
&= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.
\end{aligned}$$