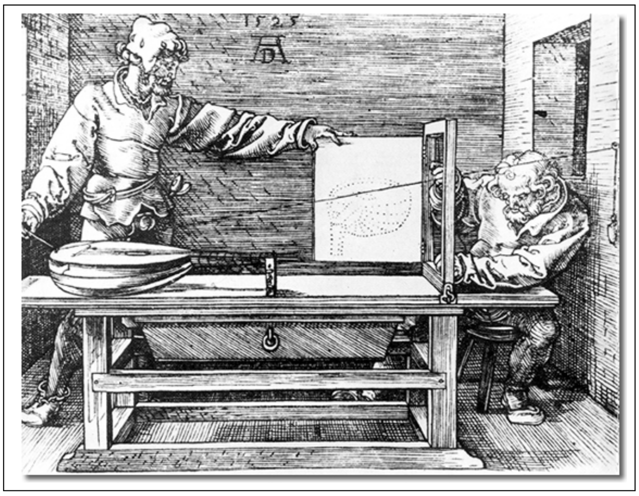
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Mathematisches Panorama*

Dr. Moritz Firsching, Dr. Jonathan Spreer

Sommersemester 2017

Blatt 5 Donnerstag, 16. XI. 2017



Albrecht Dürer erklärt, wie man vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$ abbildet. „Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen", 1525

Aufgabe 17 (Charakterisierung Injektivität / Surjektivität)

Es sei $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X, Y und Z.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Wenn f injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Wenn g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(iii) Wenn f surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iv) Wenn g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(v) Wenn f injektiv und g injektiv, dann ist $g \circ f$ injektiv.

(vi) Wenn f surjektiv und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(vii) Wenn f injektiv und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ bijektiv.

(viii) Wenn f surjektiv und g injektiv, dann ist $g \circ f$ bijektiv.

Zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung f ist injektiv, das heißt für alle $a, b \in X$ gilt: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
2. Es gibt eine Abbildung $h\colon Y \to X$, so dass $h \circ f$ die Identitätsabbildung auf X ist (oder es gilt $X = \varnothing$).

Können Sie eine ähnliche Charakterisierung von Surjektivität finden?

Aufgabe 18 (Abbildungen endlicher Mengen)

Wir betrachten die leere Menge $\varnothing$, die Menge $X := \{1\}$ die Menge $Y := \{1, 2\}$ und die Menge $Z := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wieviele Abbildungen zwischen jeweils zwei dieser Mengen gibt es? Wie viele davon sind surjektiv, wieviele injektiv und wieviele bijektiv?

alle

	$\varnothing$	X	Y	Z
$\varnothing$				
X				
Y				
Z				

injektiv

	$\varnothing$	X	Y	Z
$\varnothing$				
X				
Y				
Z				

	$\varnothing$	X	Y	Z
$\varnothing$				
X				
Y				
Z				

surjektiv

	$\varnothing$	X	Y	Z
$\varnothing$				
X				
Y				
Z				

bijektiv

Wir definieren $M_k := \{1, 2, \ldots, k\}$ für eine natürliche Zahl k. Dann gilt $M_0 = \varnothing$, $M_1 = X$ und $M_2 = Y$ und $M_3 = Z$. Es sei

- $A(n, k)$ die Menge der Abbildungen $A_n \to A_k$,
- $S(n, k)$ die Menge der surjektiven Abbildungen $A_n \twoheadrightarrow A_k$,
- $I(n, k)$ die Menge der injektiven Abbildungen $A_n \hookrightarrow A_k$,
- $B(n, k)$ die Menge der bijektiven Abbildungen $A_n \to A_k$.

Für welche dieser Mengen können Sie die Mächtigkeit bestimmen?

Aufgabe 19 (Abbildungen im Alltag)

Finden sie einige Beispiele für alltägliche Mengen und Abbildungen zwischen ihnen. Untersuchen Sie jeweils ob die Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind.

6. All ordinary operations effected on a complex variable lead, as already remarked, to other complex variables; and any definite quantity, thus obtained by operations on z, is necessarily a function of z.

But if a complex variable w be given as a complex function of x and y without any indication of its source, the question as to whether w is or is not a function of z requires a consideration of the general idea of functionality.

It is convenient to postulate $u + iv$ as a form of the complex variable w, where u and v are real. Since w is initially unrestricted in variation, we may so far regard the quantities u and v as independent and therefore as any functions of x and y, the elements involved in z. But more explicit expressions for these functions are neither assigned nor supposed.

The earliest occurrence of the idea of functionality is in connection with functions of real variables; and then it is coextensive with the idea of dependence. Thus, if the value of X depends on that of x and on no other variable magnitude, it is customary to regard X as a function of x; and there is usually an implication that X is derived from x by some series of operations†.

Andrew Russell Forsyth *Functions of complex variables*, 1893