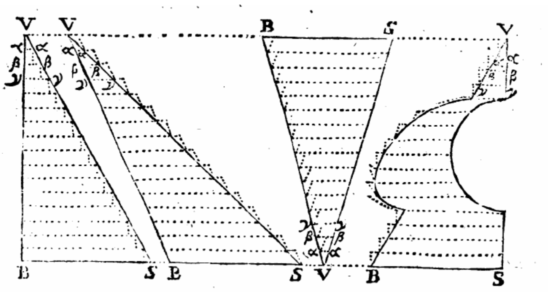
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Mathematisches Panorama*

Dr. Moritz Firsching, Dr. Jonathan Spreer

Sommersemester 2017

Blatt 6 Donnerstag, 23. XI. 2017

SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.



rithmeticè proportionalium, quarum minima eſt punctum V (verticis nimirum) maxima verò eſt B S baſis Trianguli.

Atq; idem continget ſi infinitis illis rectis ſupponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum ſingulorum altitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt ſcilicet & illa Arithmeticè proportionalia. Cùm enim æque-alta ſint, ſunt & baſibus proportionalia.

Hæc

Zwei Stellen aus John Wallis, *De sectionibus conicis*, 1655. Man beachte den Satz in Klammern: „esto enim nota ∞ numeri infiniti".

Aufgabe 20 (Räuber und Gendarm)

1. Ein Räuber R hat sich auf einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ versteckt. Der Gendarm versucht den Räuber zu fangen indem er bei jedem Einsatz in einem Punkt in der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach dem Räuber sucht.

   Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt? (Ein solcher Einsatzplan kann als eine Abbildung $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aufgefasst werden.)

2. Ein anderer Räuber S befindet sich an einem Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Jedesmal nachdem der Polizist einen Einsatz fährt, bewegt er sich in eine ganz am Anfang fest gewählte Fluchtrichtung $(v, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zunächst befindet sich der Räuber im Punkt (a, b), dann im Punkt $(a + v, b + w)$, dann im Punkt $(a + 2v, b + 2w)$ und so weiter.

   Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt?

Aufgabe 21 (Satz von Cantor)

Es sei M eine Menge. Die Potenzmenge von M ist definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}.$$

Beweisen Sie: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Gehe Sie dabei wie folgt vor:

1. Finden Sie eine injektive Abbildung $f \colon M \to \mathcal{P}(M)$ um zu zeigen, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
2. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $g \colon M \to \mathcal{P}(M)$ geben kann. Dafür ist es nützlich, die Menge aller Elemente $m \in M$ zu betrachten, so dass m nicht in $g(m)$ enthalten ist.

Aufgabe 22 (Mächtigkeiten)

Ordnen Sie die folgenden Mengen nach ihrer Mächtigkeit:

(i) $\mathbb{N}$

(ii) $\mathbb{C}$

(iii) $\{1\}$

(iv) $[8] := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(v) $Q := \{q^2 \mid q \in \mathbb{Z}\}$

(vi) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(vii) $\mathbb{P} := \{p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ prim}\}$

(viii) $\mathbb{I} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{P} \text{ und } b - a = 2\}$

(ix) $\mathbb{Q}[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q}, \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$

(x) $\mathbb{A} := \{a \mid a \in \mathbb{C} \text{ so dass } p(a) = 0 \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{Q}[x]\}$

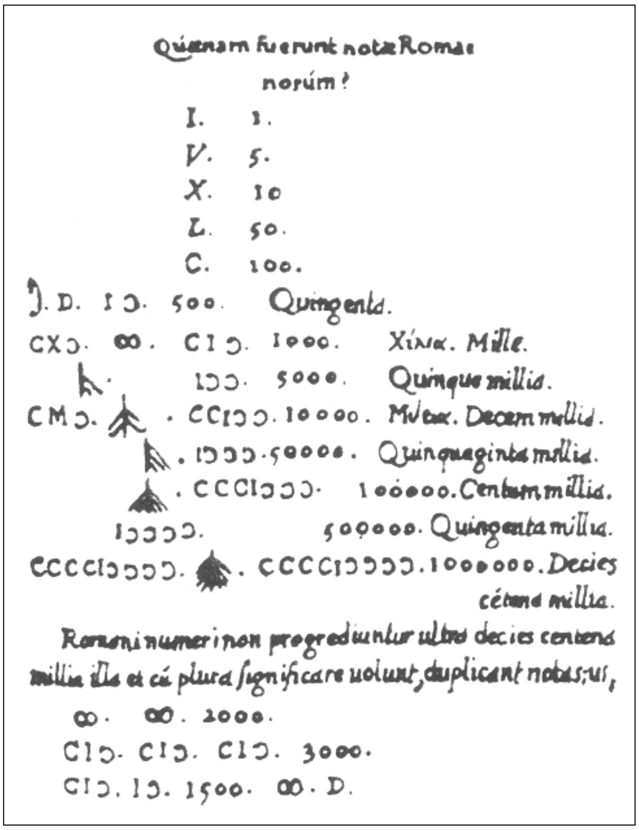
(xi) $\mathbb{R}$

(xii) $\mathbb{Q}^7$

(xiii) $\mathbb{R}^6$

(xiv) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(xv) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))))$



Quænam fuerunt notæ Romanorum?

I. 1.
V. 5.
X. 10
L. 50.
C. 100.
D. IↃ. 500. Quingenta.
CXↃ. ∞. CIↃ. 1000. Χίλια. Mille.
IↃↃ. 5000. Quinque millia.
CMↃ. · CCIↃↃ. 10000. Μύρια. Decem millia.
· IↃↃↃ. 50000. Quinquaginta millia.
· CCCIↃↃↃ. 100000. Centum millia.
IↃↃↃↃ. 500000. Quingenta millia.
CCCCIↃↃↃↃ. · CCCCIↃↃↃↃ. 1000000. Decies cētena millia.

Romani numeri non progrediuntur ultra decies centena millia illa et cū plura significare uolunt, duplicant notas; ut,

∞. ∞. 2000.
CIↃ. CIↃ. CIↃ. 3000.
CIↃ. IↃ. 1500. ∞. D.

Johann Thomas Freigius, 1582