

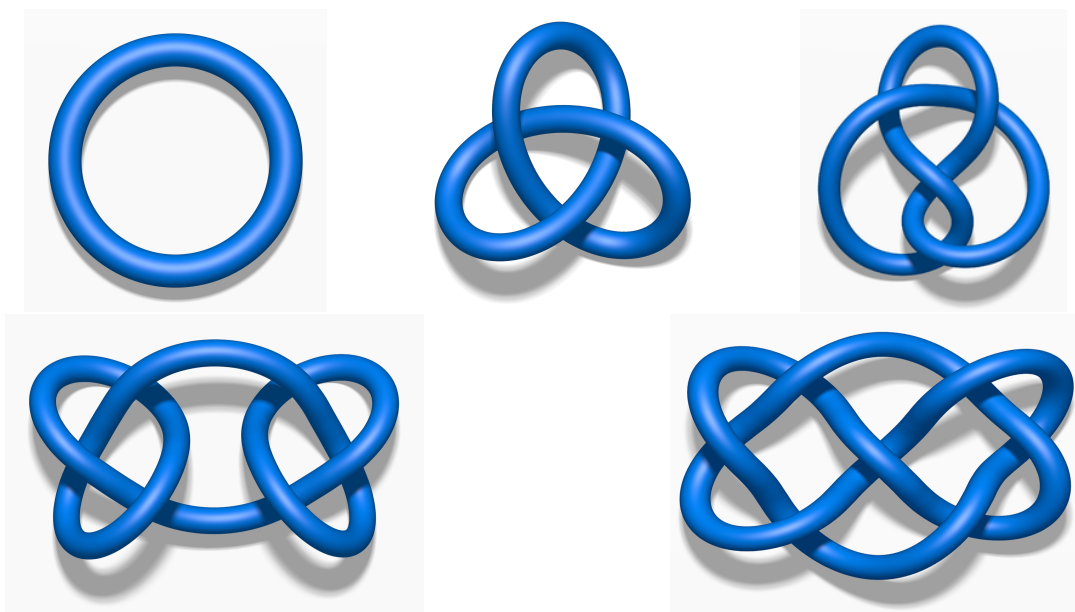
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik (LWB)*

Dr. Jonathan Spreer, Dr. Daniel Pitteloud

Sommersemester 2018

Blatt 4

Freitag, 16. III. 2018



EINE KLEINE SAMMLUNG EINFACHER KNOTEN

Aufgabe 2 (Dreifärbungen von Knotendiagrammen)

Ein Knotendiagramm besteht aus Strängen (oder Bögen) und Kreuzungen; an jeder Kreuzung treffen sich drei Stränge. Bei einer *Dreifärbung* ordnet man jedem Strang eine der Farben rot, blau oder grün zu, und zwar so, dass an jeder Kreuzung die drei Stränge entweder drei verschiedene Farben oder dreimal dieselbe Farbe haben. Die *Dreifärbungszahl* ist die Anzahl der Dreifärbungen.

- Welche der obigen fünf Knotendiagramme haben eine Färbung mit exakt drei Farben (nicht zu verwechseln mit einer Dreifärbung bei der auch weniger als drei Farben vorkommen dürfen)?
- Was ist die Dreifärbungszahl der verschiedenen Diagramme?
- Zeigen Sie, dass die Dreifärbungszahl eines Knotendiagramms eine Knoteninvariante ist – und somit charakteristisch nicht nur für das Knotendiagramm, sondern auch für den durch das Diagramm repräsentierten Knoten.
Tipp: Zeigen Sie, dass die Anzahl der Dreifärbungen konstant ist unter Reidemeister-Bewegungen.

Aufgabe 3 (Graphische Beweise)

Finden Sie graphische Beweise von mathematischen Sätzen. Zum Beispiel:

- Satz des Pythagoras;
- Unmöglichkeit, sechs Gitterpunkte auf einem ganzzahligen Gitter zu finden, die die Ecken eines regulären Sechsecks sind;
- Die Richtigkeit der Formel

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

Aufgabe 4 (Das Königsberger Brückenproblem)

- Formulieren Sie das Königsberger Brückenproblem in der Sprache der modernen Mathematik. Wie wird aus dem Problem ein zugehöriger Graph konstruiert und wie sieht dieser Graph aus? Was besagt die Lösung des Problems?
- Die Formulierung des Königsberger Brückenproblems in der Sprache der Graphentheorie erlaubt nun eine kanonische Verallgemeinerung, bei der das Problem nicht nur für einen spezifischen Graphen gestellt wird, sondern für alle Graphen. Für welche Graphen ist die zugehörige Instanz des Problems lösbar?
- Beweisen Sie die im vorherigen Schritt getätigte Aussage.