

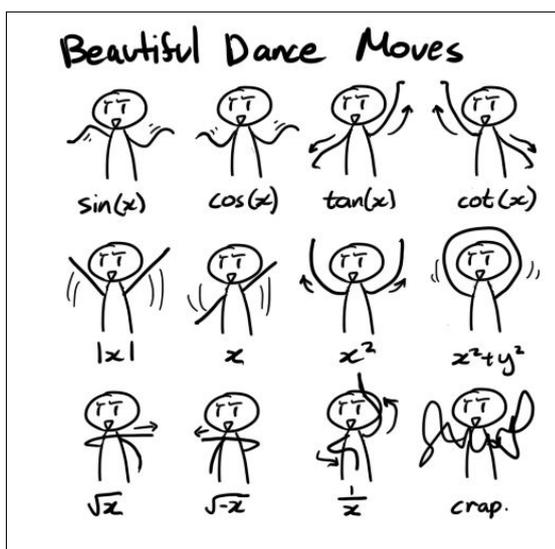
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik (LWB)*

Dr. Jonathan Spreer, Dr. Daniel Pitteloud

Sommersemester 2018

Blatt 7

Freitag, 20. IV. 2018



MATHEMATIK MIT PRAXISBEZUG

Aufgabe 19 (Charakterisierung Injektivität / Surjektivität)

Es sei $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X , Y und Z .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (i) Wenn f injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (ii) Wenn g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (iii) Wenn f surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (iv) Wenn g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (v) Wenn f injektiv und g injektiv, dann ist $g \circ f$ injektiv.
- (vi) Wenn f surjektiv und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv.
- (vii) Wenn f injektiv und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ bijektiv.
- (viii) Wenn f surjektiv und g injektiv, dann ist $g \circ f$ bijektiv.

Zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung f ist injektiv, das heißt für alle $a, b \in X$ gilt: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
2. Es gibt eine Abbildung $h: Y \rightarrow X$, so dass $h \circ f$ die Identitätsabbildung auf X ist (oder es gilt $X = \emptyset$).

Können Sie eine ähnliche Charakterisierung von Surjektivität finden?

Aufgabe 20 (Abbildungen endlicher Mengen)

Wir betrachten die leere Menge \emptyset , die Menge $X := \{1\}$ die Menge $Y := \{1, 2\}$ und die Menge $Z := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wie viele Abbildungen zwischen jeweils zwei dieser Mengen gibt es? Wie viele davon sind surjektiv, wie viele injektiv und wievielt bijektiv?

alle	injektiv																																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th>\emptyset</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>\emptyset</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>X</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		\emptyset	X	Y	Z	\emptyset					X					Y					Z					<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th>\emptyset</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>\emptyset</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>X</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		\emptyset	X	Y	Z	\emptyset					X					Y					Z				
	\emptyset	X	Y	Z																																															
\emptyset																																																			
X																																																			
Y																																																			
Z																																																			
	\emptyset	X	Y	Z																																															
\emptyset																																																			
X																																																			
Y																																																			
Z																																																			
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th>\emptyset</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>\emptyset</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>X</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		\emptyset	X	Y	Z	\emptyset					X					Y					Z					<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th>\emptyset</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>\emptyset</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>X</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		\emptyset	X	Y	Z	\emptyset					X					Y					Z				
	\emptyset	X	Y	Z																																															
\emptyset																																																			
X																																																			
Y																																																			
Z																																																			
	\emptyset	X	Y	Z																																															
\emptyset																																																			
X																																																			
Y																																																			
Z																																																			
surjektiv	bijektiv																																																		

Wir definieren $M_k := \{1, 2, \dots, k\}$ für eine natürliche Zahl k . Dann gilt $M_0 = \emptyset$, $M_1 = X$ und $M_2 = Y$ und $M_3 = Z$. Es sei

- $A(n, k)$ die Menge der Abbildungen $A_n \rightarrow A_k$,
- $S(n, k)$ die Menge der surjektiven Abbildungen $A_n \twoheadrightarrow A_k$,
- $I(n, k)$ die Menge der injektiven Abbildungen $A_n \hookrightarrow A_k$,
- $B(n, k)$ die Menge der bijektiven Abbildungen $A_n \rightarrow A_k$.

Für welche dieser Mengen können Sie die Mächtigkeit bestimmen?

Aufgabe 21 (Abbildungen im Alltag)

Finden sie einige Beispiele für alltägliche Mengen und Abbildungen zwischen ihnen. Untersuchen Sie jeweils ob die Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind.

Aufgabe X (L^AT_EX)

Ziel dieser Semesterübergreifenden Aufgabe ist es, Grundkenntnisse in dem mathematischen Textsatzsystem L^AT_EX zu erwerben. Die Bearbeitung ist erwünscht aber freiwillig. Da die Besprechung einer solchen Aufgabe in der Übung erfahrungsgemäß wenig sinnvoll ist, wird diese Frage dort nicht behandelt. Stattdessen stehe ich Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung.

Die Teilaufgabe für dieses Übungsblatt ist die Folgende:

- Erstellen Sie ein minimales funktionierendes L^AT_EX-Dokument und erzeugen Sie daraus eine pdf-Datei.

Tipp: z.B. <http://www.golatex.de/wiki/Minimalbeispiel>