

Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik (LWB)*

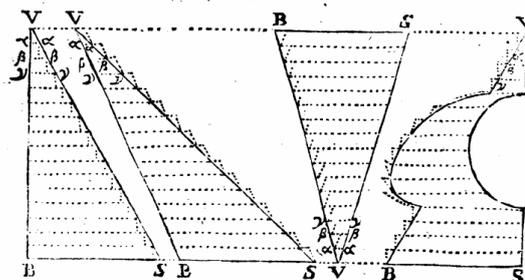
Dr. Jonathan Spreer, Dr. Daniel Pitteloud

Sommersemester 2018

Blatt 9

Freitag, 4. V. 2018

Suppono in limine (juxta Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indivisibilium*) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflare: Vel potius (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infiniti); adeoq; omnium simul altitudo æqualis altitudi ni figuræ.



rithmetice proportionalium, quarum minima est punctum V (verticis nimirum) maxima verò est BS basis Trianguli.

Atq; idem continget si infinitis illis rectis supponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum singulorum altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt scilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cùm enim æque-alta sint, sunt & basibus proportionalia.

Hæc

ZWEI STELLEN AUS JOHN WALLIS, *De sectionibus conicis*, 1655. MAN BEACHTEN DEN SATZ IN KLAMMERN: „ESTO ENIM NOTA ∞ NUMERI INFINITI“.

Aufgabe 25 (Räuber und Gendarm)

1. Ein Räuber R hat sich auf einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ versteckt. Der Gendarm versucht den Räuber zu fangen indem er bei jedem Einsatz in einem Punkt in der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach dem Räuber sucht.

Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt? (Ein solcher Einsatzplan kann als eine Abbildung $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aufgefasst werden.)

2. Ein anderer Räuber S befindet sich an einem Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Jedes mal nachdem der Polizist einen Einsatz fährt, bewegt er sich in eine ganz am Anfang fest gewählte Fluchtrichtung $(v, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zunächst befindet sich der Räuber im Punkt (a, b) , dann im Punkt $(a + v, b + w)$, dann im Punkt $(a + 2v, b + 2w)$ und so weiter.

Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt?

Aufgabe 26 (Satz von CANTOR)

Es sei M eine Menge. Die Potenzmenge von M ist definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}.$$

Beweisen Sie: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Finden Sie eine injektive Abbildung $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ um zu zeigen, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
2. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $g: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ geben kann. Dafür ist es nützlich, die Menge aller Elemente $m \in M$ zu betrachten, so dass m nicht in $g(m)$ enthalten ist.

Aufgabe 27 (Mächtigkeiten)

Ordnen Sie die folgenden Mengen nach ihrer Mächtigkeit:

1. \mathbb{N}
2. \mathbb{C}
3. $\{1\}$
4. $[8] := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $Q := \{q^2 \mid q \in \mathbb{Z}\}$
6. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
7. $\mathbb{P} := \{p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ prim}\}$
8. $\mathbb{Q}[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q}, \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$
9. $\mathbb{A} := \{a \mid a \in \mathbb{C} \text{ so dass } p(a) = 0 \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{Q}[x]\}$
10. \mathbb{R}
11. \mathbb{Q}^7
12. \mathbb{R}^6
13. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
14. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$