Klausur

Wahrscheinlichkeit und Statistik - WiSe18/19

Datum 14.Februar 2019 -- 8:00h.

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matrikul #: ______________________

Universität: ______________________

Dies ist die 1. Klausur. **Folgen Sie den Anweisungen unten**.

1) Füllen Sie das Deckblatt aus!
2) Verwenden Sie beim Lösen keine Hilfsmittel.
3) Sie haben höchstens **90 Minuten**, um die Klausuraufgaben zu lösen.
4) Geben Sie für alle Lösungen vollständige Begründungen an. Sie dürfen Ergebnisse aus den Vorlesungen unbewiesen benutzen und zitieren, sofern Sie nicht zu einem Beweis aufgefordert werden.
5) Die Lösungen für die Probleme sollten **direkt in dieses Dokument geschrieben werden**. Bei Bedarf können Sie A4-Leerseiten für längere Lösungen beifügen.
6) Die Lösungsblätter müssen **zusammengetackert** eingereicht werden.
7) Entwürfe und Skizzen von Lösungen sollten auf separaten Blättern geschrieben und **nicht eingereicht werden**. Es sollten **nur endgültige saubere Lösungen eingereicht werden**.
8) Argumente, die nicht ausgewertet werden sollen, sollten mit einem "X" durchgestrichen oder einmal durchgestrichen werden.

Eine Einreichung, die nicht den oben genannten Regeln entspricht, **wird nicht bewertet**.

Auswertung

Problem 1		10
Problem 2		10
Problem 3		10
Problem 4		10
Problem 5		10
Total		50

Problem 1

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

a) Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra auf Ω.

[/6+4 pts]

---

a) Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus drei Dingen:

- Einer nichtleeren höchstens abzählbaren Menge Ω, der Menge der Elementarereignisse.
- Einer σ-Algebra $\mathcal{E}$ auf Ω, der σ-Algebra der Ereignisse.
- Einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$.

b) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$, so dass

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Für jede disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ ist

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_1) + \dots .$$

Also $\mathbb{P}$ ist additiv.

□

Problem 2

Ein Blutanalyselabor garantiert die Erkennung einer bestimmten Krankheit mit einer Zuverlässigkeit von 95%, wenn sie tatsächlich vorhanden ist. Der Test zeigt jedoch einen falsch positiven Test für 1% der tatsächlich gesunden Menschen an, auf die wir sie anwenden. Das heißt, eine getestete Person, die gesund ist, hat eine Chance von 1% als krank erklärt zu werden.

Wenn tatsächlich 0,5% der Bevölkerung an der Krankheit leiden, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person wirklich krank ist, wenn sie aufgrund des Tests für krank erklärt wird?

Beschreiben Sie die genannten Ereignissen vollständig.

[/10 pts]

Die Menge Ω besteht aus der studierter Bevölkerung. Wir nehmen eine Person zufällig. Sei K das Ereignis „Die Person ist tatsächlig Krank". Dann K und $\overline{K}$ bilden eine Partition von Ω. Sei P das Ereignis „Der Test ist positiv". Dann haben die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $\mathbb{P}(P|\overline{K}) = 0.01 = 1/100$
- $\mathbb{P}(P|K) = 0.95 = 19/20$
- $\mathbb{P}(K) = 0.005 = 1/200$
- $\mathbb{P}(\overline{K}) = 0.995 = 199/200$

Aus dem Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}(K|P) = \frac{\mathbb{P}(P|K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(P|K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(P|\overline{K}) \cdot \mathbb{P}(\overline{K})} = \frac{(19/20) \cdot (1/200)}{(19/20) \cdot (1/200) + (1/100) \cdot (199/200)} = \frac{95}{294} \approx 0.323$$

$\square$

Problem 3

Wir betrachten das folgende Experiment, das darin besteht, die Anzahl der im Weltraum emittierten Alphateilchen durch 1g radioaktives Material in einer Sekunde zu zählen. Sei X die Zufallsvariable, die diese Anzahl gibt. Frühere Versuche haben gezeigt, dass die Anzahl der emittierten Alphateilchen im Durchschnitt 3,2 beträgt.

a) Welche Verteilung passt am besten zu dieser Situation? Warum?

b) Geben Sie eine gute Annäherung an die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Partikel erfasst werden.

[/4+6 pts]

---

a) Sei n die Anzahl von Alphateilchen in 1g. Jede teilchen kann mit eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p unabhängig von die anderen emittiert werden. Es händelt sich um eine Binomialverteilung. Aber hier ist n sehr groß, p ist unbekannt und wir kennen die Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = np = 3.2$. Dann passt die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 3.2$ am besten.

b) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2}e^{-3.2} = e^{-3.2}(1 + 3.2 + 5.12) = e^{-3.2}(9.32) \approx 0.3799.$$

$\square$

Problem 4

Sei X eine Zufallsvariable auf $[0, \infty)$ definiert.

a) Geben Sie die Formel für die Ausfallrate von X.

b) Angenommen X ist exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie, dass X eine konstante Ausfallrate hat.

c) Angenommen X ist auf den Intervall $[0, a]$ gleichverteilt. Zeigen Sie, dass für die Ausfallrate von X gilt $\frac{1}{a-t}$, für $t \in [0, a]$.

[/4+3+3 pts]

---

a) Für $t \in [0, \infty)$, ist die Ausfallrate

$$\rho(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)},$$

wobei $f(t)$ die Dichtefunktion von X ist und $\overline{F}(t) = \int_t^\infty f(x)dx$.

b) Wir haben

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ und } \overline{F}(t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_t^\infty = e^{-\lambda t}.$$

Die Ausfallrate ist dann

$$\rho(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda,$$

das heißt, $\rho(t)$ ist konstant.

c) Die Dichtefunktion ist

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } t \in [0, a], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Sei $t \in [0, a]$. Dann

$$\overline{F}(t) = \int_t^\infty f(x)dx = \frac{1}{a}(a - t).$$

Die Ausfallrate ist dann

$$\rho(t) = \frac{1/a}{(1/a)(a - t)} = \frac{1}{a - t}.$$

□

Problem 5

In einem See leben drei Fischarten. Wir gehen davon aus, dass jede Art die gleiche Chance hat, gefangen zu werden. Sei Y die Zufallsvariable „Anzahl der Fische, die gefangen werden sollen, bis wir einen Fisch von jedem Typ gefangen haben".

a) Schreiben Sie Y mit Hilfe von zwei unabhängigen Zufallsvariblen, die Wartezeiten beschreiben.

b) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y an.

c) Leiten Sie ein Intervall (a, b) her, so dass $\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) \geq 0.90$ gilt.

[/2+4+4 pts]

---

a) $Y = 1 + X_2 + X_3$, wobei

X_2: Anzahl der Fische, die gefangen werden müssen, um die zweite Fischart zu sehen, nachdem wir die erste Art gefangen haben.

X_3: Anzahl der Fische, die gefangen werden müssen, um die dritte Fischart zu sehen, nachdem wir die zweite Art gefangen haben.

b) $X_2 \sim Geom(2/3)$ und $X_3 \sim Geom(1/3)$. Der Erwartungswert von Y ist

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1 + X_2 + X_3) \overset{\text{lin. von } \mathbb{E}}{=} 1 + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 1 + \frac{3}{2} + 3 = 5.5.$$

Die Varianz von Y ist

$$V(Y) = V(1 + X_2 + X_3) \overset{\text{lin. von } V}{=} V(X_2) + V(X_3) = \frac{1 - 2/3}{(2/3)^2} + \frac{1 - 1/3}{(1/3)^2} = \frac{3}{4} + 6 = 6.75.$$

c) Die Tchebychev Ungleichung gibt:

$$\mathbb{P}(|Y - 5.5| \geq k) \leq 0.10 = \frac{6.75}{k^2}.$$

Auflösen nach k gibt $k \approx 8.2$, das heißt $\mathbb{P}(2.7 \leq Y \leq 13.7) \geq 0.90$. Da Y ganzzahlig ist, nehmen wir $(a, b) = (3, 14)$. Wir sind 90% sicher, dass wir zwischen 3 und 14 Fisch fangen müssen um die 3 Fischart zu sehen.

□