Nachklausur

Wahrscheinlichkeit und Statistik - WiSe18/19

Datum 11. April 2019 -- 8:00h.

Vorname: ____________________
Nachname: ____________________
Matrikel #: ____________________
Universität: ____________________

Dies ist die Nachklausur. **Folgen Sie den Anweisungen unten**.

1) Füllen Sie das Deckblatt aus!
2) Verwenden Sie beim Lösen keine Hilfsmittel.
3) Sie haben höchstens **90 Minuten**, um die Klausuraufgaben zu lösen.
4) Geben Sie für alle Lösungen vollständige Begründungen an. Sie dürfen Ergebnisse aus den Vorlesungen unbewiesen benutzen und zitieren, sofern Sie nicht zu einem Beweis aufgefordert werden.
5) Die Lösungen für die Probleme sollten **direkt in dieses Dokument geschrieben werden**. Bei Bedarf können Sie A4-Leerseiten für längere Lösungen beifügen.
6) Die Lösungsblätter müssen **zusammengetackert** eingereicht werden.
7) Entwürfe und Skizzen von Lösungen sollten auf separaten Blättern geschrieben und **nicht eingereicht werden**. Es sollten **nur endgültige saubere Lösungen eingereicht werden**.
8) Argumente, die nicht ausgewertet werden sollen, sollten mit einem "X" durchgestrichen oder einmal durchgestrichen werden.

Eine Einreichung, die nicht den oben genannten Regeln entspricht, **wird nicht bewertet**.

Auswertung

Problem 1		10
Problem 2		10
Problem 3		10
Problem 4		10
Problem 5		10
Total		50

Problem 1

Es seien $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{10}\}$ mit $\omega_i = i$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω und die Abbildung $\mathbb{P}_c : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_c(\omega_i) = \frac{c}{2^i}$ für $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass das Tripel $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_c)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit das Ereignis G für „gerade Zahl" und für das Ereignis U „ungerade Zahl".

[/5+5 pts]

---

a)

- Ω ist eine Menge.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.
- Ist $\mathbb{P}_c$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

Dafür muss $\mathbb{P}_c(\omega_i) \in [0,1]$ und $\mathbb{P}_c(\Omega) = 1$.

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_c(\omega) = \sum_{i=1}^{10} \frac{c}{2^i} = c \cdot \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2^i} = c\left(\frac{1-(1/2)^{11}}{1-(1/2)} - 1\right) = c(2-(1/2)^{10}-1) = c(1-(1/2)^{10}).$$

Dann muss

$$c = \frac{1}{1-(1/2)^{10}} = \frac{2^{10}}{2^{10}-1}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_c(G) &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}_c(\omega_{2i}) = c\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right) \\
&= \frac{c}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= \frac{c}{4}\left(\frac{1-(1/4)^5}{1-(1/4)}\right) = \frac{c}{3}(1-(1/4)^5) = \frac{c}{3}\frac{2^{10}-1}{2^{10}} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_c(U) = 2/3$, da U und G eine Partition von Ω bilden.

Problem 2

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

a) Stichprobenvarianz V_x, einer Probe $x = \{x_1, \dots, x_n\}$.

b) X eine Binomialverteilte Zufallsvariable.

[/4+6 pts]

---

a) Unter der Stichprobenvarianz der Stichprobe $\{x_1, \dots, x_n\}$ versteht man die Zahl

$$V_x := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

b) Seien $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$. Wir wiederholen einen Bernoulli-Test (Erfolg/Misserfolg) n mal unter der selben Bedingungen und die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Zufallsvariable $X_{n,p}$ die die Anzahl der Erfolge angibt ist eine Binomialzufallsvariable.

Problem 3

Wir werfen einen fairen 5-seitigen Würfel 3-mal hintereinander. Die Seiten des Würfels seien mit $1, 2, \ldots, 5$ beschriftet. Das Ergebnis des i-ten Wurfes werde durch die Zufallsvariable X_i $(i = 1, 2, 3)$ beschrieben. Definiert seien weiterhin die Zufallsvariablen $S := 5X_1 + 4X_2 + 2X_3$ und $D := 5X_1 - 4X_2 - 3X_3$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S)$ und $V(D)$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S \cdot D) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(D)$.

[/5+5 pts]

---

a)

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{x=1}^{5} x\mathbb{P}(x) \stackrel{fair}{=} \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(5X_1 + 4X_2 + 2X_3) &\stackrel{\text{lin. von } \mathbb{E}}{=} 5\mathbb{E}(X_1) + 4\mathbb{E}(X_2) + 2\mathbb{E}(X_3)\\ &\stackrel{\text{Id. verteilt}}{=} 11\mathbb{E}(X_1) = 33.\end{aligned}$$

$$V(D) = V(5X_1 - 4X_2 - 3X_3) \stackrel{\text{quad. von } V}{=} 25V(X_1) - 16V(X_2) - 9V(X_3) \stackrel{\text{Id. verteilt}}{=} 0.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S \cdot D) &= \mathbb{E}(25X_1^2 - 16X_2^2 - 6X_3^2 - 5X_1X_3 - 20X_2X_3)\\ &\stackrel{\text{lin. von } E, \text{ Id. verteilt}}{=} 3\mathbb{E}(X_1^2) - 25\mathbb{E}(X_1X_2) = 3 \cdot 11 - 25 \cdot 3^2 = -192.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(S \cdot D) - \mathbb{E}(S) \cdot \mathbb{E}(D) = -192 - (33)(-6) = 6.$$

Problem 4

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Eine Zahl m mit $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$ und $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$ heißt ein **Median** von X.

Geben Sie einen Median von X, für die folgenden Fälle an.

a) X ist gleichverteilt auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

b) X ist exponentialverteilt mit Parameter λ.

c) X ist geometrisch verteilt mit Parameter p.

[/3+4+4 pts]

---

a) $F_X(t) = \frac{t-a}{b-a}$. Dann

$$\frac{m-a}{b-a} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{b+a}{2}.$$

b) $F_X(t) = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

Dann

$$1 - e^{-\lambda m} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \geq e^{-\lambda m} \iff \log(1/2) \geq -\lambda m \iff m \geq \frac{\log 2}{\lambda}.$$

c)

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2 \iff 1 - (1-p)^m \geq 1/2 \iff 1/2 \geq (1-p)^m \iff m = \frac{-\log 2}{\log(1-p)}.$$

Problem 5

Eine Lehrerin weiß aus Erfahrung, dass die Ergebnisse der Mathe-Olympiade Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 sind.

a) Geben Sie eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit an, dass das Testergebnis einer Schülerin 80 überschreitet.

b) Angenommen die Lehrerin weiß auch, dass die Varianz der Ergebnisse 25 beträgt. Geben Sie eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Schülerin zwischen 50 und 70 Punkte bekommt.

[/6+4 pts]

---

a) Markov: X : Testergebnis einer Schülerin. X ist nicht negative. Für alle $a > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Hier mit $a = 80$ und $\mathbb{E}(X) = 60$ haben wir:

$$\mathbb{P}(X \geq 80) \leq \frac{60}{80} = \frac{3}{4}.$$

b) Tchebychev gibt uns: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$. Hier $k = 10$. So ist

$$\mathbb{P}(|X - 60| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \mathbb{P}(50 \leq X \leq 70) \geq \frac{3}{4}.$$