

Probeklausur

Wahrscheinlichkeit und Statistik - WiSe18/19

Abgabe 7 Januar 2019 -- 10:00

Vorname: _____
Nachname: _____
Matrikul #: _____

Dies ist eine Probeklausur. Folgen Sie den Anweisungen.

- 1) Füllen Sie das Deckblatt aus!
- 2) Verwenden Sie beim Lösen keine Hilfsmittel.
- 3) Unter regulären Klausurbedingungen beträgt die Bearbeitungszeit **90 Minuten**.
- 4) Geben Sie für alle Lösungen vollständige Begründungen an. Sie dürfen Ergebnisse aus den Vorlesungen unbewiesen benutzen und zitieren, sofern Sie nicht zu einem Beweis aufgefordert werden.
- 5) Die Lösungen für die Probleme sollten **direkt in dieses Dokument geschrieben werden**. Bei Bedarf können Sie A4-Leerseiten für längere Lösungen hinzufügen.
- 6) Alle Lösungsblätter müssen **getackert** eingereicht werden.
- 7) Entwürfe und Skizzen von Lösungen sollten auf separaten Blättern geschrieben und nicht eingereicht werden. Es dürfen nur endgültige saubere Lösungen eingereicht werden.
- 8) Argumente, die nicht ausgewertet werden sollen, sollten mit einem "X" durchgestrichen oder einmal durchgestrichen werden.

Eine Einreichung, die nicht den oben genannten Regeln entspricht, **wird nicht bewertet**.

Auswertung

Problem 1		10
Problem 2		10
Problem 3		10
Problem 4		10
Problem 5		10
Total		50

Problem 1

Geben Sie für die folgenden Begriffe auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ die Definition an.

- a) Eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum sei hier diskret.
- b) Bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \in \mathcal{E}$ unter der Bedingung $B \in \mathcal{E}$.
- c) Unabhängigkeit von zwei Ereignissen in $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

[/10 pts]

Problem 2

- a) Angenommen, Sie würfeln mit einem fairen Würfeln vier Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfen eine Eins zu würfeln?
- b) Angenommen, Sie werfen nun zwei faire Würfel gleichzeitig. Sie wetten mit einem Freund, in 24 Würfen einen Dreier-Pasch (zwei mal "3") zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Wette gewinnen? Bitte vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich (Potenzausdrücke müssen nicht ausgerechnet werden).

[/10 pts]

Problem 3

In einer Buntstiftfabrik beträgt bei der Herstellung die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Stift 0,05. Ob ein Stift defekt ist, ist unabhängig von den anderen. Das Unternehmen verkauft die Buntstiften in 5-er Packs und erlaubt den Umtausch eines 5-er Pack, wenn mehr als ein Stift defekt ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 5-er Pack umgetauscht werden kann? Beschreiben Sie bei Ihrer Lösung Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariable exakt.

[/10 pts]

Problem 4

Sei X eine Zufallsvariable die gemäß einer Poisson-Verteilung mit Parameter λ verteilt ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X = i)$ eine zunächst monoton steigende und dann monoton fallende Funktion mit Maximum bei $i = \lambda$ ist.

[/10 pts]

Problem 5

Sei X eine Zufallsvariable die gemäß einer Binomial-Verteilung mit den Parametern $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$ verteilt ist.

- Geben Sie zuerst die allgemeine Definitionen für die Erwartungswerte den Variablen X an.
- Leiten Sie darauf eine explizite Formel für $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(1/(X+1))$ her.
- Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \cdot (1 - (1-p)^{n+1})$$

der Erwartungswert der Variable $1/(X+1)$ ist.

[/10 pts]
