Probeklausur

Wahrscheinlichkeit und Statistik - WiSe18/19

Abgabe 7 Januar 2019 -- 10:00

Vorname: ________________________
Nachname: ________________________
Matrikul #: ________________________

Dies ist eine Probeklausur. Folgen Sie den Anweisungen.

1) Füllen Sie das Deckblatt aus!
2) Verwenden Sie beim Lösen keine Hilfsmittel.
3) Unter regulären Klausurbedingungen beträgt die Bearbeitungszeit **90 Minuten**.
4) Geben Sie für alle Lösungen vollständige Begründungen an. Sie dürfen Ergebnisse aus den Vorlesungen unbewiesen benutzen und zitieren, sofern Sie nicht zu einem Beweis aufgefordert werden.
5) Die Lösungen für die Probleme sollten **direkt in dieses Dokument geschrieben werden**. Bei Bedarf können Sie A4-Leerseiten für längere Lösungen hinzufügen.
6) Alle Lösungsblätter müssen **getackert** eingereicht werden.
7) Entwürfe und Skizzen von Lösungen sollten auf separaten Blättern geschrieben und nicht eingereicht werden. Es dürfen nur endgültige saubere Lösungen eingereicht werden.
8) Argumente, die nicht ausgewertet werden sollen, sollten mit einem "X" durchgestrichen oder einmal durchgestrichen werden.

Eine Einreichung, die nicht den oben genannten Regeln entspricht, **wird nicht bewertet**.

Auswertung

Problem 1		10
Problem 2		10
Problem 3		10
Problem 4		10
Problem 5		10
Total		50

Problem 1

Geben Sie für die folgenden Begriffe auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ die Definition an.

a) Eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum sei hier diskret.

b) Bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \in \mathscr{E}$ unter der Bedingung $B \in \mathscr{E}$.

c) Unabhängigkeit von zwei Ereignissen in $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$.

[/10 pts]

---

a) Es ist $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ und es ist eine Zahl $\lambda \geq 0$ vorgegeben. Die Poisson Verteilung zum Parameter λ ist durch

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(n) = P(n; \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

für $n \in \mathbb{N}$ erklärt.

b) Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B ist

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

wenn $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt.

c) Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig wenn $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ gilt.

$\square$

Problem 2

a) Angenommen, Sie würfeln mit einem fairen Würfeln vier Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfen eine Eins zu würfeln?

b) Angenommen, Sie werfen nun zwei faire Würfel gleichzeitig. Sie wetten mit einem Freund, in 24 Würfen einen Dreier-Pasch (zwei mal "3") zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Wette gewinnen? Bitte vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich (Potenzausdrücke müssen nicht ausgerechnet werden).

[/10 pts]

---

a) Sei $\Omega := \{\text{Alle mögliche Ergebnisse bei 4 Würfen}\}$. Dann gilt $|\Omega| = 6^4$.

Sei das Ereignis E=„Es gab keine '1' unter den 4 Würfen". Da die Würfe unabhängig sind, mit der Produktregel folgt

$$\mathbb{P}(E) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{6^4}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die komplement Ereignis von E, d.h.

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}.$$

b) Sei E das Ereignis „ein Dreier-Pasch ist geworfen worden". Die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier-Pasch ist dann $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{36}$. Zuerst betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, die Wette zu verlieren. Dafür muss man 24 mal kein Dreier-Pasch werfen, d.h.

$$\mathbb{P}(\overline{E})^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Wette zu gewinnen, ist somit

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}}.$$

□

Problem 3

In einer Buntstiftfabrik beträgt bei der Herstellung die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Stift 0,05. Ob ein Stift defekt ist, ist unabhängig von den anderen. Das Unternehmen verkauft die Buntstiften in 5-er Packs und erlaubt den Umtausch eines 5-er Pack, wenn mehr als ein Stift defekt ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 5-er Pack umgetauscht werden kann? Beschreiben Sie bei Ihrer Lösung Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariable exakt.

[/10 pts]

Für $i \in [5]$, betrachte die Ereignisse $S_i =$ „Der i-te Stift ist defekt“. Die S_i's sind unabhängig. Ausserdem betrachten wir die Menge $\Omega = \{\text{Defekt, nicht defekt}\}$ der Fundamentalzustände eines Stiftes. Wir definieren die Zufallsvariable X als die „Anzahl der defekten Stiften in einem 5-er-Pack“. Deshalb ist $X : \Omega^5 \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$. Die Zufallsvariable X folgt einer Binomialverteilung:

- X besteht aus $n = 5$ Bernoulli Tests auf Ω.
- Die Tests sind unabhängig.
- Die Tests haben eine konstant Wahrscheinlichkeit $p = 1/20$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(X \leq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\
&= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(\frac{19}{20}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1\left(\frac{19}{20}\right)^4 \\
&= 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^5 - \frac{1}{4}\left(\frac{19}{20}\right)^4 = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^4\left(\frac{24}{20}\right) \\
&= 1 - \frac{19^4 \cdot 24}{20^5}.
\end{aligned}$$

□

Problem 4

Sei X eine Zufallsvariable die gemäß einer Poisson-Verteilung mit Parameter λ verteilt ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X = i)$ eine zunächst monoton steigende und dann monoton fallende Funktion mit Maximum bei $i = \lambda$ ist.

[/10 pts]

Es gilt

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},$$

für $i \in \mathbb{N}$. Die Funktion $\mathbb{P}(X)$ ist genau dann von $X = i$ nach $X = i+1$ steigend, wenn

$$\mathbb{P}(X = i+1) - \mathbb{P}(X = i) \geq 0$$

gilt. Das ist äquivalent zu

$$\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}e^{-\lambda} - \frac{(i+1)\lambda^i e^{-\lambda}}{(i+1)!} \geq 0$$

und zu

$$\frac{e^{-\lambda}}{(i+1)!}\lambda^i\big(\lambda - (i+1)\big) \geq 0.$$

Da $e^{-\lambda}$ und $(i+1)!$ positiv sind, haben wir

$$\lambda - (i+1) \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda \geq i+1.$$

Also ist $\mathbb{P}(X = \lambda)$ größer oder gleich $\mathbb{P}(X = \lambda - 1)$. Damit ist die Funktion $\mathbb{P}(X)$ von $X = i$ nach $X = i+1$ für $i \geq \lambda$ fallend. $\square$

Problem 5

Sei X eine Zufallsvariable die gemäß einer Binomial-Verteilung mit den Parametern $n \geq 1$ und $p \in (0,1)$ verteilt ist.

a) Geben Sie zuerst die allgemeine Definitionen für die Erwartungswerte den Variablen X an.

b) Leiten Sie darauf eine explizite Formel für $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(1/(X+1))$ her.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \cdot \left(1-(1-p)^{n+1}\right)$$

der Erwartungswert der Variable $1/(X+1)$ ist.

[/10 pts]

---

a) Der Erwartungswert der Variable X ist

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n \cdot p \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\
&\overset{j=i-1}{=} np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1}}_{\text{nach Binomialsatz } =1} \\
&= np.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \frac{1}{(n+1)p} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} p^{i+1} (1-p)^{n-i}}_{\text{nach Binomialsatz } =1-(1-p)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(n+1)p} \left(1-(1-p)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

□