2. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 05.11. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: http://page.mi.fu-berlin.de/labbe

---

1. Diskussionsaufgabe*: weder durch 5, noch durch 6 noch durch 8 teilbar
Wie viele natürliche Zahlen x mit $1 \leq x \leq 1000$ sind weder durch 5, 6 oder 8 teilbar?

2. Diskussionsaufgabe*: Beweis durch Bijektion?

a) Es ist aus der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ klar, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Geben Sie einen bijektiven Beweis dieser Aussage. Das bedeutet, Sie eine Bijektion von A nach B erzeugen müssen, wobei A eine Menge mit $\binom{n}{k}$ Elemente ist und B eine Menge mit $\binom{n}{n-k}$ Elemente ist.
b) Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Teilmengen von $[n]$ enthalten ein gerade Anzahl von Elementen? Wie viele Teilmengen von $[n]$ enthalten ein ungerade Anzahl von Elementen? Können Sie einen Beweis mit Hilfe einer Bijektion angeben?

3. Diskussionsaufgabe*:
Wir wählen ein Anagramm von WISSENSCHAFTLERIN zufällig aus, wobei alle Anagramme dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.

a) Wie groß ist groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Anagramm ein “S” an vierter Stelle und ein “E” an vierzehnter Stelle steht?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Anagramm die drei “S” direkt aufeinander folgen und auch die beiden “E” direkt aufeinander folgen?

---

1. Hausaufgabe: Beweis durch Bijektion!
Beweisen Sie die Identität $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ mit Hilfe einer geeigneten Bijektion.

2. Hausaufgabe: Is math fun? Math is fun!

a) Wie viele Permutationen der Buchstaben

$$M,\ A,\ T,\ H,\ I,\ S,\ F,\ U,\ N$$

gibt es, in denen die Buchtstabenfolge MATH oder IS oder FUN nicht vorkommen? Die Permutationen MATHISFUN, INUMATHSF und ISMATHFUN sind Beispiele verbotener Permutationen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter allen Permutationen der Buchstaben

$$I,\ S,\ M,\ A,\ T,\ H,\ F,\ U,\ N$$

eine Permutation zu wählen, die mindestens eine der Buchstabenfolgen MATH, IS oder FUN enthält? Wir nehmen zusätzlich an, dass dabei jede Permutation mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt wird.

3. Hausaufgabe: Von 27 Milliarden Münzen und 28 Länder
Das Vereinigte Königreich möchte die die europäische Union verlassen und muss daher den

anderen 27 Ländern der europäischen Union €27.000.000.000 bezahlen. Der britische Schatzmeister sieht das als einmalige Gelegenheit, endlich alle 27 Milliarden Münzen vom Nennwert €1 loszuwerden, die in seiner Schatzkammer lagern.

Die 27 Regierungschefs entscheiden in einer langen Sitzungsnacht, dass es nur fair ist, die 27 Milliarden Münzen zufällig zu verteilen, wobei jede mögliche Verteilung die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. (Die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Zypern alle 27 Milliarden Münzen erhält, und dass jedes Land eine Milliarde Münzen erhält, sind also gleich groß)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Land kein Geld vom Vereinigten Königreich enthält? Sie müssen Sie die Antwort nicht ausrechnen, aber Sie müssen den Wahrscheinlichkeitsraum genau beschreiben.

4. Hausaufgabe: Von $2n$ SchachspielerInnen und n Schachbrettern

Wir verallgemeinern das Schachbeispiel von der Vorlesung und betrachten nun $2n$ SchachspielerInnen, die an n Schachbrettern spielen möchten. (n sei natürlich eine natürliche Zahl)

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn weder die Zuordnung von Spielerpaar zu Schachbrett noch wer weiß bzw. schwarz spielt wichtig ist.
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Zuordnung von Spielerpaar und Schachbrett wichtig ist, es aber keine Rolle spielt, wer weiß bzw. schwarz spielt?
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Zuordnung nicht von Spielerpaar und Schachbrett wichtig ist, es aber eine Rolle spielt, wer weiß bzw. schwarz spielt?
d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sowohl die Zuordnung und Weiß/Schwarz wichtig sind?

Vergessen Sie bei all Ihren Lösungen nicht, die Mengen, die Sie zählen, und den Wahrscheinlichkeitsraum, in dem Sie rechnen, genau zu beschreiben. Begründen Sie Ihre Lösungsschritte!