

3. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die vierte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 12.11. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: <http://page.mi.fu-berlin.de/labbe>

1. Diskussionsaufgabe*: Von Laplace-Räumen mit Paaren mit Kindern

Wir nehmen an, dass ein Kind stets entweder ein Junge oder ein Mädchen ist, und betrachten Paare mit genau zwei Kindern. Beschreiben Sie für die folgenden drei Modelle den zugehörigen Laplace-Raum explizit. Geben Sie also die Menge Ω der Elementarereignisse, die σ -Algebra \mathcal{E} und das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} an.

- a) Paare werden genau dann nicht unterschieden, wenn die Geschlechter der Kinder in der Reihenfolge der Geburt übereinstimmen.
- b) Paare werden genau dann nicht unterschieden, wenn die Geschlechter der Kinder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Geburt übereinstimmen.
- c) Paare werden genau dann nicht unterschieden, wenn die Anzahl der Mädchen übereinstimmt.
- d) Wie groß ist in den drei Modellen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E „mindestens ein Kind ist ein Mädchen“?

2. Diskussionsaufgabe*: Von Wahrscheinlichkeitsräumen mit Paaren mit Kindern

Wie in der ersten Diskussionsaufgabe nehmen wir an, dass ein Kind stets entweder ein Junge oder ein Mädchen ist, und betrachten Paare mit genau zwei Kindern. Weiter sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ der Laplace-Raum unter der Annahme, dass Paare genau dann nicht unterschieden werden, wenn die Geschlechter der Kinder in der Reihenfolge der Geburt übereinstimmen. Außerdem sei E das Ereignis „mindestens ein Kind ist ein Mädchen“.

- a) Geben Sie Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_a, \mathcal{E}_a, \mathbb{P}_a)$ und $(\Omega_b, \mathcal{E}_b, \mathbb{P}_b)$ an, so dass gilt:
 - i) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_a(E)$ und Paare werden in Ω_a genau dann nicht unterschieden, wenn die Geschlechter der Kinder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Geburt übereinstimmen.
 - ii) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_b(E)$ und Paare werden in Ω_b genau dann nicht unterschieden, wenn die Anzahl der Mädchen übereinstimmt.
- b) Sind die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_a, \mathcal{E}_a, \mathbb{P}_a)$ und $(\Omega_b, \mathcal{E}_b, \mathbb{P}_b)$ eindeutig bestimmt?

3. Diskussionsaufgabe*: erzeugte σ -Algebren

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und \mathcal{F} eine Familie von Teilmengen von Ω . Zeigen Sie:

- a) Es gibt stets eine σ -Algebra, die \mathcal{F} enthält.
- b) Unter allen σ -Algebren, die die Familie \mathcal{F} enthalten, gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste σ -Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Diese Familie wird die von \mathcal{F} erzeugte σ -Algebra genannt $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ und besteht aus all den Mengen, die in allen σ -Algebren enthalten sind, die \mathcal{F} enthalten.

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Wahrscheinlichkeiten und Mengenoperationen explizit

Gegeben seien ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichne, sowie drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{E}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Weiterhin seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}(A) = 0,3; \quad \mathbb{P}(B) = 0,2; \quad \mathbb{P}(C) = 0,4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0,1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(A \setminus B)$, $\mathbb{P}(C \setminus A)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ und $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.

2. Hausaufgabe: ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum?

Es seien $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{10}\}$ mit $\omega_i = i$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω und die Abbildung $\mathbb{P}_c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_c(\omega_i) = \frac{c}{2^i}$ für $c \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass das Tripel $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_c)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit das Ereignis G „gerade Zahl“ und für das Ereignis U „ungerade Zahl“.

3. Hausaufgabe: Geburtstagstripel

In der Vorlesung haben wir die Mindestzahl der Studierenden bestimmt, dass mit Wahrscheinlichkeit $\geq \frac{1}{2}$ ein Paar von Studierenden an demselben Tag Geburtstag hat. Wir untersuchen nun die Situationen für Tripel von Studierenden, die an demselben Tag Geburtstag haben.

Zur Abwechslung nehmen wir an, dass der 29. Februar in jedem Jahr existiert und jeder Geburtstag die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

- Seien n und k natürliche Zahlen mit $n > 0$ und $n \geq 2k$. Wie viele n -Tupel von Geburtstagen gibt es, wobei es genau k Paare mit demselben Geburtstagen und kein Tripel mit demselben Geburtstag gibt?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tripel von n Studierenden gibt, das denselben Geburtstag hat?
- Was ist das kleinste n , so dass die Wahrscheinlichkeit von (b) kleiner als 50% ist?¹

4. Hausaufgabe: Glücksrad

Obwohl es wegen der begrenzten Messgenauigkeit nicht möglich ist, nehmen wir an, dass wir die Position eines Zeigers eines Glücksrads mit Umfang 1 stets exakt bestimmen können.

- Angenommen der Kreisbogen des Glücksrads ist in n zusammenhängende und paarweise disjunkte Bogenstücke $\omega_1, \dots, \omega_n$ der Länge $\mathbb{P}(\omega_1), \dots, \mathbb{P}(\omega_n)$ aufgeteilt. Weiter bezeichne $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ und $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung mit $\mathbb{P}(\omega_{i_1} \cup \dots \cup \omega_{i_r}) = \mathbb{P}(\omega_{i_1}) + \dots + \mathbb{P}(\omega_{i_r})$. Ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?
- Seien Ω die Menge aller möglichen Positionen des Glücksradzeigers, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω und $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Raum. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(E)$, falls E das Ereignis ist, dass der Zeiger
 - auf einer vorgegebenen Stelle des Glücksrads stehen bleibt;
 - in einem vorgegebenen zusammenhängenden Bogenstücks des Glücksrads stehen bleibt.

¹Wir empfehlen die Anwendung eines Computers oder eines Online-Rechnerdienstes wie beispielsweise <https://gamma.sympy.org> oder <https://www.wolframalpha.com>!