5. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die sechste Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 26.11. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: http://page.mi.fu-berlin.de/labbe

---

1. Diskussionsaufgabe*: beweisbar unabhängig
Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ und Ereignisse A und B, wobei Ω endlich sei und $\mathbb{P}(B) > 0$.

a) Beweisen Sie, dass A und B genau dann unabhängig sind, wenn $\mathbb{P}(A|B) = P(A)$ gilt.
b) Wann sind A und A unabhängig?

2. Diskussionsaufgabe*: false positive I
Durch einen medizinischen Test soll entschieden werden, ob eine Person eine bestimmte Krankheit hat oder nicht. Ein Problem ist, dass bei einem derartigen Test (mit kleiner Wahrscheinlichkeit) Fehler auftreten können. Dadurch kann es passieren, dass jemand laut Testergebnis gesund ist, obwohl er tatsächlich krank ist, bzw. laut Testergebnis krank ist, obwohl er tatsächlich gesund ist. Wir betrachten nun $\Omega = \{(g, -), (g, +), (k, -), (k, +)\}$, wobei beispielsweise $(g, +)$ für gesund und positives Testergebnis (also: gesund laut Test, aber tatsächlich krank) steht. Die Spezifität p_{sp} des Tests ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(„\text{negativ}“|„\text{gesund}“)$ und die Sensitivität p_{se} des Tests ist $\mathbb{P}(„\text{positiv}“|„\text{krank}“)$. Diese beiden Größen sind ziemlich sichere Erfahrungswerte. Die relative Häufigkeit $q := \mathbb{P}(„\text{krank}“)$ der untersuchten Krankheit hängt im allgemeinen aber von der „Risikogruppe“ der Patienten ab.

a) Geben Sie Formeln für $\mathbb{P}(g, -)$, $\mathbb{P}(g, +)$, $\mathbb{P}(k, -)$ und $\mathbb{P}(k, +)$ an.
b) Interpretieren Sie Größen $\mathbb{P}(g, -)$, $\mathbb{P}(g, +)$, $\mathbb{P}(k, -)$ und $\mathbb{P}(k, +)$ mit Hilfe eines Quadrats mit Flächeninhalt 1.
c) Geben Sie jeweils vier Formeln für $\mathbb{P}(„\text{gesund}“|„\text{negativ}“)$ und $\mathbb{P}(„\text{krank}“|„\text{positiv}“)$ an.
d) Für einen Test gelte $p_{sp} = p_{se} = 0{,}998$. Skizzieren Sie die Funktionen

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1], \quad q \longmapsto \mathbb{P}(„\text{gesund}“|„\text{negativ}“) \qquad g : [0,1] \longrightarrow [0,1], \quad q \longmapsto \mathbb{P}(„\text{krank}“|„\text{positiv}“)$$

Was passiert für kleine Werte $0 < q \ll 1$ bzw. große Werte $0 \ll q < 1$?

---

1. Hausaufgabe: zwei verschieden Urnen und eine Münze
Wir betrachten zwei Urnen: Die erste enthält zwei schwarze, drei rote und vier grüne Bälle, während die zweite vier schwarze, drei rote und zwei grüne Bälle enthält. Eine Urne steht links und die andere rechts von uns, wir wissen aber nicht, welche Urne links und welche rechts steht. Wir werfen eine faire Münze, um zu entscheiden, aus welcher Urne wir einen Ball ziehen (Kopf: links; Zahl rechts). Wir haben die Münze geworfen, ziehen aus der rechten Urne einen schwarzen Ball und legen ihn zurück.

Für die weiteren Hausaufgaben bitte wenden!

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir aus der rechten Urne erneut einen schwarzen Ball?
b) Angenommen wir haben tatsächlich zweimal hintereinander aus der rechten Urne einen schwarzen Ball gezogen und ihn wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir aus der rechten Urne noch einmal einen schwarzen Ball ziehen?
c) Angenommen wir haben n-mal hintereinander aus der rechten Urne einen schwarzen Ball gezogen (und ihn stets zurückgelegt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir beim $(n+1)$-mal aus der rechten Urne erneut einen schwarzen Ball ziehen?

2. Hausaufgabe: Würfeln mit einem und mit zwei Würfeln

a) Angenommen, Sie würfeln mit einem fairen Würfeln vier Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfen eine Eins zu würfeln?
b) Angenommen, Sie werfen nun zwei faire Würfel gleichzeitig. Sie wetten mit einem Freund, in 24 Würfen einen Dreier-Pasch zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Wette gewinnen?

3. Hausaufgabe: gute oder schlechte Behandlung?
Ein Mediziner hat für eine neue Behandlung einer tödlichen Krankheit die folgenden Daten bei Patienten in der Stadt und auf dem Land gesammelt:

	behandelt (Stadt)	nicht behandelt (Stadt)	behandelt (Land)	nicht behandelt (Land)
geheilt	1000	50	95	5000
gestorben	900	950	5	5000

a) Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt wurde, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Empfehlen Sie die Zulassung der neuen Behandlungsmethode?
b) Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde und in der Stadt lebt, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt und in der Stadt lebt die Wahrschenlichkeit geheilt zu werden?
c) Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde und auf dem Land lebt, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt und auf dem Land lebt, die Wahrschenlichkeit geheilt zu werden?
d) Bleiben Sie bei Ihrer Empfehlung, die neue Behandlungsmethode zuzulassen bzw. nicht zuzulassen?

4. Hausaufgabe: false positive II
Ein Anteil $p \in]0,1[$ von Patienten leidet an einer Infektion durch den M-Virus. Der Nachweis dieser Krankheit durch einen Bluttest ist nicht zuverlässig. Falls jemand vom M-Virus befallen ist, dann diagnostiziert der Bluttest dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Falls jemand nicht infiziert ist, dann diagnostiziert der Bluttest in 5% der Fälle trotzdem eine M-Virusinfektion.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich infiziert ist, falls der Bluttest dies diagnostiziert, $\frac{90p}{85p+5}$ beträgt.
b) Für welche Werte von p ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich infiziert ist, falls der Bluttest dies diagnostiziert, größer als 90%?

Denken Sie daran, dass es nicht genügt, nur ein Ergebnisse anzugeben!