6. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die siebente Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 03.12. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: `http://page.mi.fu-berlin.de/labbe`

---

1. Diskussionsaufgabe*: Probleme eines Verlegers

Die Kosten für eine Buchproduktion (inklusive Vertrieb und Marketing) sehen folgendermaßen aus: Die ersten 1000 Exemplare kosten drei Euro pro Buch, die nächsten 4000 Exemplare kosten zwei Euro pro Buch und jedes weitere Exemplar kostet einen Euro. Die Produktion ist „print-on-demand", dass heisst, die genannten Kosten fallen für k-te Buch seit Produktionsbeginn wie angegeben an. Der Verleger stellt den Buchhandlungen für jedes Buch fünf Euro in Rechnung.

a) Beschreiben Sie die Zufallsvariablen X „der Verleger verkauft insgesamt k Bücher" und Y „Gewinn/Verlust des Verlegers beim Verkauf von k Büchern" mathematisch. Drücken Sie die Zufallsvariable Y unter Verwendung der Zufallsvariable X aus!
b) Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Verleger einen Verlust macht.
c) Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Verleger mindestens 5.000 Euro Gewinn macht.

2. Diskussionsaufgabe*: Ein Produkt von Zufallsvariablen?

Sei Ω eine Menge von fünf reellen Zahlen.

a) Definieren Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß und eine Zufallsvariable X, so dass die Werte $1, 2, 3, 4, 5$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ annimmt. Geben Sie eine weitere Zufallsvariable Y an, die die Werte $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}$ annimmt.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable XY.

3. Diskussionsaufgabe*:

Zwei Gene kontrollieren die Augenfarbe einer Person, wobei es jeweils ein „blaues" und „rotes" Gen gibt. Besitzt jemand zwei blaue Gene, so sind die Augen dieser Person blau. Ansonsten sind die Augen rot.

Die Gene werden von beiden Eltern folgendermaßen vererbt. Wenn jemand ein Kind hat, gibt er seinem Kind eine Kopie eines seiner Gene, wobei das kopierte Gen zufällig ausgewählt wird. Das andere Gen des Kindes wird von dem anderen Elternteil genauso vererbt.

Nun möchte ein Paar, bei dem beide sowohl ein blaues Gen als auch ein rotes Gen besitzen, vier Kinder in ihrer Familie haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der Kinder blaue Augen besitzen?

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Drei Zufallsvariablen...
Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitkeitsraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

sowie die Zufallsvariablen X, Y und Z mit

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &:= 1, & X(\omega_2) &:= 2, & X(\omega_3) &:= 3; \\ Y(\omega_1) &:= 2, & Y(\omega_2) &:= 3, & Y(\omega_3) &:= 1; \\ Z(\omega_1) &:= 3, & Z(\omega_2) &:= 1, & Z(\omega_3) &:= 2. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der drei neuen Zufallsvariablen $X+Y$, $X+Y-Z$ und $\sqrt{(X^2+Y^2)Z}$.

2. Hausaufgabe: Münzwurf und Stabdiagramme
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, beim Mehrmaligen Werfen einer fairen Münze erstmalig beim k-ten Wurf „Kopf“ zu erhalten. Erstellen Sie eine Skizze für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für $k \in \{1; 2; \ldots; 10\}$.

3. Hausaufgabe: Geschworenengericht
Wir betrachten ein Gerichtsurteil, bei dem das Urteil „schuldig“ von 8 der 12 Geschworenen bestätigt werden muss, damit es gültig wird. Die Geschworenen treffen ihre Entscheidungen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Geschworener das richtige Urteil trifft, ist für alle Geschworen gleich und beträgt ϑ. Wie groß ist die Warscheinlichkeit, das das Gerichtsurteil der Wahrheit entspricht?

Hinweis: Es kann helfen, wenn Sie auch die Wahrscheinlichkeit α, dass der Beschuldigte tatsächlich schuldig ist, betrachten.

4. Hausaufgabe: Datenübertragung
Bei der elektronischen Datenübertragung werden Nachrichten in einer Folge von Signalen mit Werten 0 oder 1 kodiert, eine Nachricht wird dabei als ein „Wort“ $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0; 1\}^n$ der Länge n aufgefasst. Bei der elektronischen Übertragung der Nachricht $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ kann ein Fehler $\epsilon = (e_1, \ldots, e_n) \in \{0; 1\}^n$ auftreten, dann wird das Wort $\omega' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ empfangen. Wir einigen uns, dass $e_i = 0$ genau dann gilt, falls $a_i = a'_i$ und dass $e_i = 1$ genau dann gilt, falls $a_i \neq a'_i$. Wir nehmen an, dass Übertragungsfehler an verschiedenen Stellen im Wort unabhängig voneinander vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler an der Stelle i vokommt, beträgt p.

a) Die Zufallsvariable X zählt die bei der Datanübertragung auftretenden Fehler. Leiten Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k)$ her.
b) Bestimmen Sie für $n = 16$, $p = 0{,}1$ und $k \in \{0; 1; \ldots 5\}$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ und erstellen Sie ein Stabdiagramm für diese Werte.
c) Es gilt weiterhin $n = 16$ und $p = 0{,}1$. Wie groß muss k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für k oder mehr Übertragungsfehler höchstens 2% ist?