8. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die neunte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 17.12. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: http://page.mi.fu-berlin.de/labbe

---

1. Diskussionsaufgabe*: absolut konvergent, nicht wahr?

a) Geben Sie eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ an.
b) Modifizieren Sie Ihre Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ unter Verwendung einer geeigneten Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ nicht absolut konvergiert.

2. Diskussionsaufgabe*: verfaulte Äpfel
Angenommen unter 550 Äpfeln befinden sich 11 verfaulte Äpfel. Wir entnehmen eine Stichprobe von 25 Äpfeln.

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung für genau k verfaulte Äpfel in der Stichprobe?
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe kein verfaulter Apfel ist.

3. Diskussionsaufgabe*: Erwartungswert der Poisson-Verteilung
Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für eine mit Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable X auf dem abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ gilt $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

4. Diskussionsaufgabe*: erwarten wir den Erwartungswert?
Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ auf dem abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ betrachten wir die Menge P aller Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und das Bild $X(\Omega)$ von X sowie die Urbildmengen $X^{-1}\{k\}$ und $\mathbb{P}^{-1}\{p\}$ für $k \in X(\Omega)$ und $p \in P$. Somit gilt einerseits

$$P = \{\mathbb{P}(\omega) \ \mid \omega \in \Omega\} \qquad \text{und} \qquad X(\Omega) = \{X(\omega) \ \mid \omega \in \Omega\}$$

und andererseits

$$\mathbb{P}^{-1}\{p\} = \{\omega \in \Omega \ \mid \mathbb{P}(\omega) = p\}\,. \qquad \text{und} \qquad X^{-1}(k) = \{\omega \in \Omega \ \mid X(\omega) = k\}$$

Diskutieren Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\Big(\sum_{\omega\in X^{-1}(k)} \mathbb{P}(\omega)\Big) = \sum_{p\in P} \sum_{\omega\in X^{-1}(k)} X(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Abordnung einer Klasse
In einer Schulklasse sind 12 Schülerinnen und 15 Schüler. Die Klasse möchte eine Abordnung entsenden, die aus fünf Schülerinnen und Schülern besteht und durch Los bestimmt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Geschlechter in der Abordnung vertreten sind?

2. Hausaufgabe: Schon wieder Urnen
Gegeben seien die folgenden drei Urnen, in denen sich N Kugeln befinden, von denen r Kugeln rot und $N - r$ Kugeln schwarz sind:

	N	r	$N-r$
Urne 1	10	7	3
Urne 2	20	14	6
Urne 3	100	70	30

.

Ohne zurückzulegen ziehen wir nun aus jeder Urne jeweils 7 Kugeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zwei rote Kugeln zu ziehen.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, nur rote Kugeln zu ziehen.

3. Hausaufgabe: Erwartungswerte eines fairen Dodekaederwürfels
Die zwölf Seiten eines fairen Dodekaederwürfels sind mit den Zahlen $1, \ldots, 12$ beschriftet. Wir würfeln dreimal hintereinander mit dem Würfel und beschreiben für $i \in \{1, 2, 3\}$ das Ergebnis des i-ten Wurfs mit der Zufallsvariablen X_i.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_i)$ für $i \in 1, 2, 3$.
b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2)$ und $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)$

4. Hausaufgabe:
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{3;\ 8\}$ und $\mathbb{P}(X = 3) = p$. Bestimmen Sie alle Werte von p, für die

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

gilt.