9. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die elfte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 14.01. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: http://page.mi.fu-berlin.de/labbe

---

1. Diskussionsaufgabe*: Produkt-Dichten
Eine Dichte in $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht negative integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

Damit die auftretenden Integrale wohldefiniert sind, muss f zusätzliche Eigenschaften besitzen. Eine derartige Eigenschaft ist beispielsweise, dass f stetig ist.

Gegeben seien n unabhängige stetige Zufallsvariablen X_i, die durch Dichtefunktionen f_i beschrieben werden. Beweisen Sie dass $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$ eine Dichtefunktion für die Zufallsvariable $X = (X_1, \ldots, X_n)$ in $\mathbb{R}^n$, die die unabhängige Experimente X_i beschreibt.

2. Diskussionsaufgabe*: Summe aller Momente?
Sei X eine Zufallsvariable die durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

verteilt ist. Betrachten Sie die Zufallsvariable $Y = e^X$.

a) Berechnen Sie die kumulierte Verteilungsfunktion von Y.
b) Berechnen Sie die Dichtefunktion von Y.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

3. Diskussionsaufgabe*: Unpünktlichkeit ist teuer!

Sie müssen eine Strafe zahlen, wenn Sie nicht pünktlich zum vereinbarten Termin kommen. Für gegebene $c, k > 0$ zahlen Sie $c \cdot m$ Euro bzw. $k \cdot m$ Euro falls Sie m Minuten zu früh bzw. zu spät kommen. Darüberhinaus ist die Reisezeit von Ihrem Standort zum vereinbarten Treffpunkt eine stetige Zufallsvariable X, die durch eine Dichtefunktion f verteilt ist.

Wenn Sie t Minuten vor Ihrem Termin losgehen, dann beträgt ihre Strafe

$$S_t(X) = \begin{cases} c(t - X) & \text{wenn } X \leq t, \\ k(X - t) & \text{wenn } X \geq t. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Zeit t^*, die Sie vor Ihrem Termin losgehen müssen, um den Erwartungswert Ihrer Strafe zu minimieren.

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Boltzmann und Molekülgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines Moleküls in einem homogenen Gas im Gleichgewichtszustand ist eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-bx^2} & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Dabei sei $b = \frac{m}{2kT}$, wobei k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und m die Molekülmasse bezeichen.

Bestimmen Sie a in Abhängigkeit von b.

2. Hausaufgabe: Hochwahrscheinliche Ereignisse

Eine Tankstelle wird einmal wöchentlich mit Benzin versorgt und verkauft höchstens 5000 Liter pro Woche. Das wöchentliche Verkaufsvolumen in Tausend Litern ist eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß sollte die Kapazität des Tanks sein, damit die Tankfüllung mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 0,01 in einer Woche aufgebraucht wird.

3. Hausaufgabe: Wie lange sollte die Elektronenröhre halten?

Die Lebensdauer einer Elektronenröhre (gemessen in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$\begin{aligned} f : [0; \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto xe^{-x}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lebenserwartung dieser Elektronenröhre.

4. Hausaufgabe: Wo sollten die Werkstätten am besten sein?

Ein Bus pendelt zwischen den Städten A und B, die 100 km voneinander entfernt liegen. Wir nehmen an, dass bei einem Busausfall die Entfernung vom Ort des Schadens zur Stadt A gleichmäßig über das Intervall $(0; 100)$ verteilt ist.

Zur Zeit gibt es drei Vertragswerrkstätten: je eine in A und B sowie eine 50km von A entfernt. Bei der Neuausschreibung der Werkstattsverträge wird den Landrat empfohlen, dass je eine Werkstatt 25, 50 bzw. 75 km entfernt von A entfernt sein sollten. Sind sie dieser Meinung? Warum?