10. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)

Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die zwölfte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 21.01. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: http://page.mi.fu-berlin.de/labbe

---

1. Diskussionsaufgabe*: Lineare Transformation der Normalverteilung

Eine wichtige Eigenschaft der Familie normalverteilter Variablen ist die Folgende. Ist X mit den Parametern μ und σ^2 normalverteilt, so ist die Verteilung von $Y = aX + b$ mit den Parametern $a\mu + b$ und $\alpha^2\sigma^2$ ebenfalls normalverteilt. Beweisen Sie diese Eigenschaft.

2. Diskussionsaufgabe*: Approximation von Φ

Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable und $\Phi(x)$ ihre kumulierte Verteilungsfunktion, d.h. $\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$. Integrieren Sie die Ungleichungen

$$(1 - 3y^{-4})e^{-\frac{y^2}{2}} < e^{-\frac{y^2}{2}} < (1 + y^{-2})e^{-\frac{y^2}{2}},$$

und folgen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{x^2}{2}} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

für $x > 0$ gilt.

3. Diskussionsaufgabe*: Batterieprobleme

Die Anzahl der Kilometer, die ein Auto vor dem ersten Batterieausfall normalerweise fahren kann, ist exponentiell verteilt und der Durchschnittswert liegt bei 10.000 km. Eine Person möchte eine Reise von 5.000 km unternehmen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Reise ohne Batterieausfall zu beenden? Wie ändern sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Verteilung nicht exponentiell ist?

4. Diskussionsaufgabe*: Übertragunsprobleme

Wir senden ein binäres Signal (d.h. 0 oder 1) mit einem elektrischen Kabel von einem Punkt A zu einem Punkt B. Die Übertragung wird jedoch durch Rauschen beeinträchtigt. Wir senden ein Signal mit Intensität 2, um „1“ zu kommunizieren, und ein Signal mit Intensität -2, um „0“ zu kommunizieren. Wenn x das von A emittierte Signal und E das in B empfangene Signal bezeichnen, dann ist $E = x + R$, wobei R das Rauschen auf dem Kanal darstellt. Die Dekodierung folgt den Regeln:

- $E \geq 0,5$ wird als eine „1“ interpretiert.
- $E < 0,5$ wird als eine „0“ interpretiert.

Wir nehmen $R \sim N(0, 1)$ an. Bestimmen Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei den möglichen Signalen ein Interpretationsfehler auftritt.

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Klimawandel?

Die jährliche Niederschlagsmenge (in cm) in einer bestimmten Region scheint gemäß einer Normalverteilung mit $\mu = 140$ und $\sigma^2 = 16$ verteilt zu sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ab diesem Jahr mehr als 10 Jahre gewartet werden muss, bis ein Jahr mit einer jährlichen Regenmenge von mehr als 150 cm erreicht wird? Welche Annahmen machen Sie?

2. Hausaufgabe: Fairer Würfel?

Wir betrachten 1000 unabhängige Würfe eines faires Würfels.

a) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass „6“ zwischen 150 und 200 Mal erscheint.
b) Angenommen „6“ erscheint genau 200 Mal. Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass „5“ weniger als 150 Mal erscheint.

3. Hausaufgabe: Eine komische Maschine.

Die Reparaturzeit (in Stunden) einer Maschine ist eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 1/2$.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturzeit zwei Stunden überschreitet?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reparatur, die bereits neun Stunden dauert, mindestens zehn Stunden benötigt?

4. Hausaufgabe: Wo sollte die Feuerwache am besten sein?

Eine Feuerwache muss an einer Straße der Länge A gebaut werden. Wo sollte sich die Feuerwache befinden, um die durchschnittliche Entfernung der Feuerwache zu minimieren?

a) Angenommen die Straße endlich lange ist, d.h. $[0, A]$, und die Feuer gleichverteilt über das Intervall $[0, A]$ auftreten.
b) Angenommen die Straße jetzt unendlich lang ist, d.h. von 0 bis $+\infty$, und die Feuer Exponentialverteilte über das intervall $[0, \infty]$ auftreten.