11. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die dreizehnte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 28.01. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: `http://page.mi.fu-berlin.de/labbe`

---

1. Diskussionsaufgabe*: Versteckte Exponentialverteilung

Angenommen X folgt einer Weibull-Verteilung mit positiven reellen Parametern α und β. Weiter sei

$$Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta}.$$

Folgern Sie, dass Y eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 1$ ist.

2. Diskussionsaufgabe*: Tchebychev kann schlecht sein

Sei X eine auf $[0; 10]$ gleichverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = 5$ und $V(X) = \frac{25}{3}$.

Bestimmen Sie den Unterschied zwischen der Tchebychev-Schätzung von $P(|X - 5| > 4)$ und dem tatsächlichen Wert.

3. Diskussionsaufgabe*: Popovicius Ungleichung

Es sei X eine Zufallsvariable $X : \Omega \to [0; c]$, d.h. $\mathbb{P}(0 \leq X \leq c) = 1$. Folgern Sie:

$$Var(X) \leq \frac{c^2}{4}.$$

4. Diskussionsaufgabe*: Eigenschaften der Normalverteilung

Es sei Z eine Standardnormalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

a) $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(Z < -x)$.
b) $\mathbb{P}(|Z| > x) = 2\mathbb{P}(Z > x)$.
c) $\mathbb{P}(|Z| < x) = 2\mathbb{P}(Z < x) - 1$.

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Zufälliges Dartspiel

In einer Kreisscheibe mit Radius 1 wird ein Punkt zufällig gewählt (mit Gleichverteilung auf der Fläche). Bestimmen Sie die Dichtefunktion der Verteilung seines Abstandes vom Mittelpunkt M des Kreises. Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Bullseye zu werfen, wenn der Bullseye-Radius $\frac{1}{25}$ ist?

2. Hausaufgabe: Ausfallrate

Bestimmen Sie für $\beta > 1$ die Ausfallrate der Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_\beta(x) = \begin{cases} x^{-\beta}/(1-\beta) & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

3. Hausaufgabe: Signal-Rausch-Verhältnis

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Der Quotient $R = |\mu|/\sigma$ heißt *Signal-Rausch-Verhältnis* von X. (Das SRV wird zum Beispiel benutzt um Analog-Digital-Wandler zu bewerten.) Also X kann durch $X = \mu + (X - \mu)$ dargestellt werden, wobei μ das Signal und $X - \mu$ das Rauschen mit Varianz σ^2 darstellen. Wir definieren den relativen Fehler von X im Verhältnis mit seinen Signal (oder Erwartungswert μ) als $D := |(X - \mu)/\mu|$.

Beweisen Sie für alle $\alpha > 0$, dass

$$\mathbb{P}(D \leq \alpha) \geq 1 - \frac{1}{r^2\alpha^2}.$$

gilt.

4. Hausaufgabe: Zufällige reelle Wurzeln

Es sei $Y : \Omega \to [0; 5]$ eine gleichverteilte Zufallsvariable.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Wurzeln des Polynoms

$$p_\omega(x) = 4x^2 + 4Y(\omega)x + Y(\omega) + 2,$$

reell sind?