12. Übung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS 2018/19)
Dr. J.-P. Labbé, Prof. Dr. C. Lange

Diskussionsaufgaben für die vierzehnte Übung (keine Abgabe) sind mit einem Stern gekennzeichnet
Gruppenabgabe der Hausaufgaben (Aufgaben ohne Stern) bis 04.02. um 10 Uhr (Fach Julian Bayerl)
Informationen zur Vorlesung und zum Übungsbetrieb: `http://page.mi.fu-berlin.de/labbe`

---

1. Diskussionsaufgabe*: In einer weit entfernten Galaxie.

Ein Astronom möchte die Entfernung zwischen der Erde und einem Stern in Lichtjahren messen. Die verwendete Technik ist aufgrund von atmosphärischem Einfluss und anderen Fehlern niemals genau. Der Astronom nimmt also mehrere Messungen vor und akzeptiert den Durchschnitt als Schätzung des tatsächlichen Wertes. Angenommen, seine Messungen sind unabhängig und identisch mit Erwartungswert D und Varianz 4 (in Lichtjahren) verteilt.

Wie viele Messungen sollte er durchführen, damit der Fehler kleiner als ein Lichtjahr wird? Der Astronom ist bereit, einen größeren Fehler mit einer 5%-ige Chance zu haben.

Vergleichen Sie die Schätzung aus dem Zentralen Grenzwertsatz und der der Tchebyschev Ungleichung. Welche ist sicherer? Warum?

2. Diskussionsaufgabe*: Chebyshevs einseitige Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = 0$ und $V(X) = \sigma^2$ endlich. Zeigen Sie für $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

3. Diskussionsaufgabe*: Ein letztes Mal einen Würfel werfen

Wir werfen einen Würfel, bis die Summe der Augenzahlen größer als 300 ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mehr als 80 Würfe benötigen werden?

4. Diskussionsaufgabe*: Eigenschaften der Normalverteilung

Eine Versicherungsgesellschaft hat 10 000 versicherte Autos. Die erwartete jährliche Entschädigungszahlung beträgt jährlich 240 EUR pro Auto mit einer Streuung von 800. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die jährlichen Entschädigungen 2,7 Mio. EUR überschreiten werden.

Für die Hausaufgaben bitte wenden!

1. Hausaufgabe: Fast sicher Null

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen und X_k mit Parameter $\sqrt{k}$ exponentiell verteilt.

Zeigen Sie, dass $\frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ fast sicher gegen 0 konvergiert.

2. Hausaufgabe: Es ist doch keine Zahlentheorievorlesung

Für Primzahlen p sei $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid p \text{ teilt } n\}$.

Zeigen Sie, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\Omega = \mathbb{N}$ gibt, für welche die A_p für verschiedene Primzahlen unabhängig sind und $\mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{p}$ gilt.

(Hinweis: $\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p} = \infty$)

3. Hausaufgabe: Wie groß ist dieser Fisch?

Sei X eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Zeigen Sie für $i < \lambda$:

$$\mathbb{P}(X \leq i) \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^i}{i^i}.$$

4. Hausaufgabe: Welcher Fisch ist das?

In einem See leben vier Fischarten. Wir gehen davon aus, dass jede Art die gleiche Chance hat, gefangen zu werden. Sei Y die Zufallsvariable „Anzahl der Fische, die gefangen werden sollen, bis wir einen Fisch von jedem Typ gefangen haben“.

Geben Sie ein Intervall (a, b) damit an, so dass $P(a \leq Y \leq b) \geq 0.90$ gilt.

(Hinweis: Schreiben Sie Y mit Hilfe von unabhängigen Zufallsvariblen, die Wartezeiten beschreiben.)